Cap. 9.- Integração de Equações Diferenciais Ordinárias (ODE's)

9.1. Definições

ODE ou EDO

Equações diferenciais ordinárias são aquelas que relacionam derivadas totais de variáveis dependentes com uma única variável independente.

A ordem da equação depende da ordem da maior derivada envolvida na expressão.

Primeira ordem

$$\frac{dy}{dt}=f(t,y)$$

Segunda ordem

$$\frac{d^2y}{dt^2}=f(t,y,\frac{dy}{dt})$$

Ordem n

$$\frac{d^n y}{dt^n}=f(t,y,\frac{dy}{dt},\ldots,\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}})$$

As ODE's podem ser lineares ou não-lineares em função da sua função da variável dependente ser linear ou não.

Linear

$$\frac{dy}{dt}+\alpha\, y=F(t)$$

Não-linear

$$y\frac{dy}{dt}+\alpha\, y=F(t)$$

Onde F(t) é chamado de *termo fonte* e quando é diferente de zero a equação é chamada de *não-homogênea*.

Se o termo fonte é nulo a equação é chamada de homogênea.

Homogênea e não-linear

$$y\frac{dy}{dt}+\alpha\, y=0$$

Um sistema de ODE's envolve mais de uma variável dependente.

Sistema de ODE's

$$a=f(t,v,x)$$
$$\frac{dv}{dt}=f(t,a)$$
$$\frac{dx}{dt}=f(t,v)$$

9.1. Definições(cont.)

PDE ou EDP

Equações diferenciais parciais são aquelas que relacionam derivadas parciais de variáveis dependentes com duas ou mais variáveis independentes.

Primeira ordem

$$\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial x}=f(t,x,y)$$

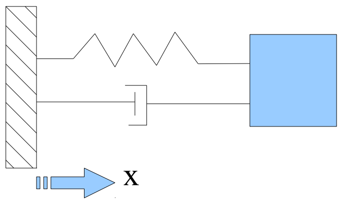
As equações diferenciais podem ser classificadas quanto ao problema físico representado, ou seja, suas condições iniciais e de contorno.

Problema de valor inicial (IVP ou PIV)

A solução é encontrada resolvendo a equação a partir de valores iniciais conhecidos.

ex: sistema massa-mola-amortecedor

$x=x_0\ para\ t=t_0$



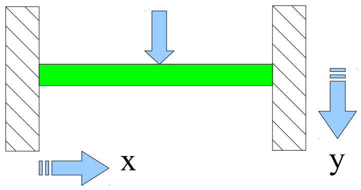
Problema de valor de contorno (BVP ou PVC)

A solução é encontrada resolvendo a equação a partir de valores iniciais conhecidos e condições especificadas em pontos determinados do domínio.

ex: viga com engastamento duplo

$y_0=0\ para\ x=0$

$y_L=0\ para\ x=L$



9.2. Solução Numérica de ODE's

O processo de solução consiste em transformar as ODE's em equações algébricas através da discretização do domínio e aproximar as derivadas por diferenças finitas.

FDE ou EDF

As equações obtidas são chamadas de equações de diferenças finitas (FDE's) e constituem uma aproximação das ODE's originais.

Exemplo de Métodos de Solução de ODE's

- Euler explícito
- Preditor-Corretor
- Runge-Kutta (várias ordens)
- Adams-Bashforth-Moulton
- Gear (equações tipo stiff)
- Métodos de passo ***adaptativo***

O passo varia com o erro estimado.

Referências

Cap. 6 do livro do Barroso et al., 1987
Cap. 12 do livro do Al-Khafaji et Tooley, 1986
Part II e Cap. 7 do livro do Hoffman, 1992

9.3. Método da Série de Taylor

Seja a equação diferencial expressa por uma função e uma condição inicial (CI):

$$y' = f(t, y) \qquad \textit{Equação Diferencial}$$

$$y(t_0) = y_0 \qquad \textit{Condição Inicial}$$

Expandindo y(t) em uma série de Taylor em torno do ponto t = t_0, têm-se,

Leonhard Euler (1707-1783)

$$y(t) = y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2} y''(t_0)(t - t_0)^2 + \frac{1}{6} y'''(t_0)(t - t_0)^3 + \ldots + \frac{1}{n!} y^n(t_0)(t - t_0)^n$$

ou,

$$y(t) = y(t_0) + y'(t_0)\Delta t + \frac{1}{2} y''(t_0)\Delta t^2 + \frac{1}{6} y'''(t_0)\Delta t^3 + \ldots$$

onde,

$\Delta t = t - t_0$ é chamado de passo de integração

A solução pelo método da Série de Taylor envolve a avaliação de várias derivadas de diferentes ordens, o que pode ser bastante complexo e trabalhoso.

9.4. Método de Euler Explícito

Seja,

$$y' = f(t, y) \qquad \textit{Equação Diferencial}$$

$$y(t_0) = y_0 \qquad \textit{Condição Inicial}$$

Aproximando a derivada pela série de Taylor e usando somente os dois primeiros termos, têm-se,

O( ) = ordem do erro detruncamento da série

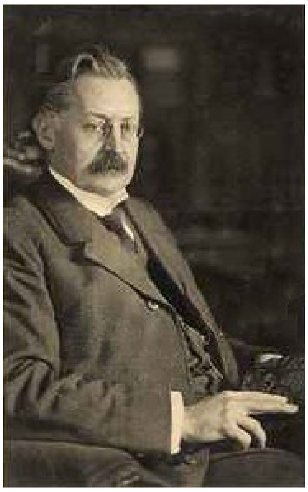
$$y(t) = y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0) + O(\Delta t^2)$$

O método explícito usa valores de derivadas em um ponto anterior ao ponto em cálculo

Assim, pode-se escrever, para o método de Euler Explícito:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \, f(t_n, y_n)$$

9.5. Método de Runge-Kutta



Carl Dave Tolme Runge

A idéia do método é assumir que a variação da variável dependente $\Delta y = y_{n+1} - y_n$ pode ser obtida por uma média ponderada de "m" estimativas Δy_i (i = 1..m) calculadas usando diferentes valores de derivadas f(t,y) ao longo do intervalo de integração Δt.

O método pode ser descrito por:

$$\begin{aligned}
y_{n+1} - y_n &= c_1 \Delta y_1 + c_2 \Delta y_2 + c_3 \Delta y_3 + \ldots \\
\Delta y_1 &= \Delta t\, f(t_n, y_n) \\
\Delta y_2 &= \Delta t\, f(t_n + \alpha_2, y_n + \beta_2) \\
\Delta y_3 &= \Delta t\, f(t_n + \alpha_3, y_n + \beta_3) \\
\Delta y_4 &= \Delta t\, f(t_n + \alpha_4, y_n + \beta_4) \\
&\vdots \qquad \vdots
\end{aligned}$$

Os parâmetros c_i, α_i e β_i são constantes do método escolhidas para ajustar a série de Taylor para y(t) até uma certa ordem.

Runge-Kutta de 2ª ordem (ver dedução no livro texto)

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \Delta y_2 \\
\Delta y_1 &= \Delta t\, f(t_n, y_n) \\
\Delta y_2 &= \Delta t\, f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{\Delta y_1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Runge-Kutta de 4ª ordem

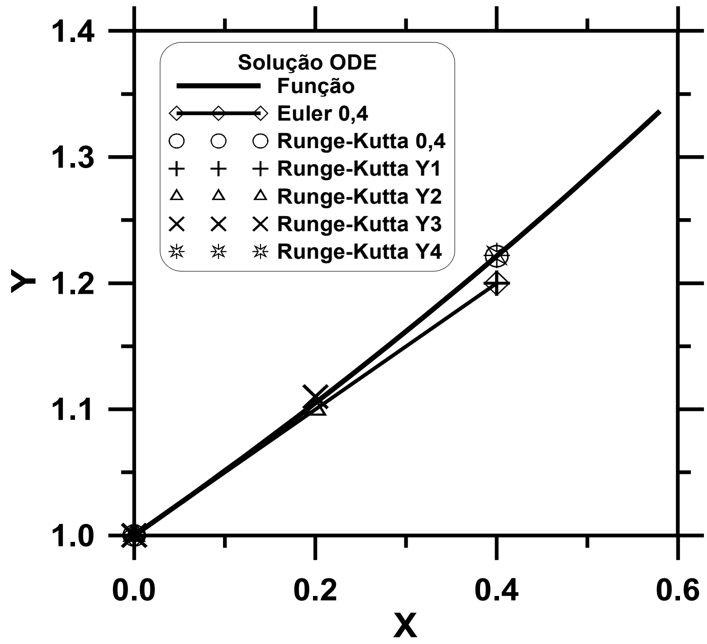
$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(\Delta y_1 + 2\Delta y_2 + 2\Delta y_3 + \Delta y_4) \\
\Delta y_1 &= \Delta t\, f(t_n, y_n) \\
\Delta y_2 &= \Delta t\, f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{\Delta y_1}{2}\right) \\
\Delta y_3 &= \Delta t\, f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{\Delta y_2}{2}\right) \\
\Delta y_4 &= \Delta t\, f(t_n + \Delta t, y_n + \Delta y_3)
\end{aligned}$$

Martin Wilhelm Kutta

Notar que o primeiro termo é a estimativa do método de Euler Explícito e os outros termos são pontos a meia distância do ponto final $t+\Delta t$ e consistem em um procedimento de correção da estimativa inicial.

O método ainda é explícito e exige a avaliação de quatro derivadas em cada passo de integração (4ª ordem).

9.6. Interpretação Geométrica



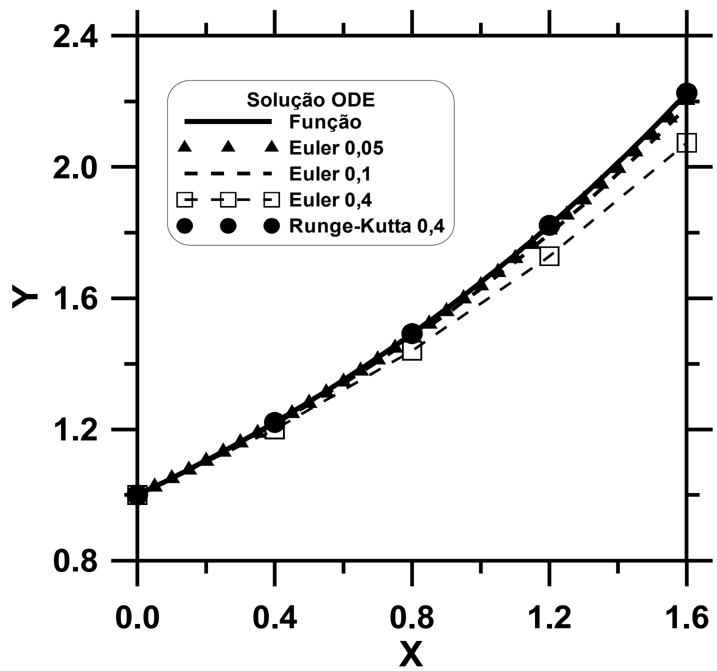
9.7. Erros

Convergente

A integração é dita convergente se a solução numérica se aproxima da solução exata.

Divergente

A integração é dita divergente se a solução numérica se afasta rapidamente da solução exata.



Observação

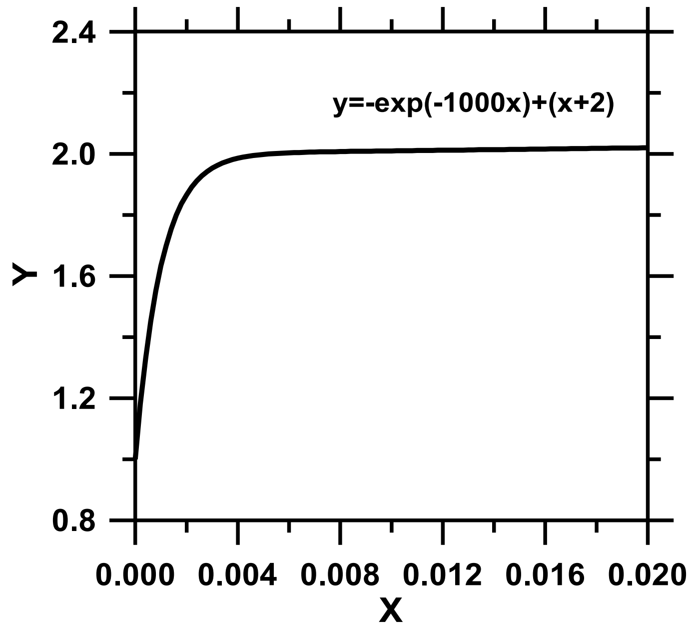
Equações duras (Stiff) (Stiffness)

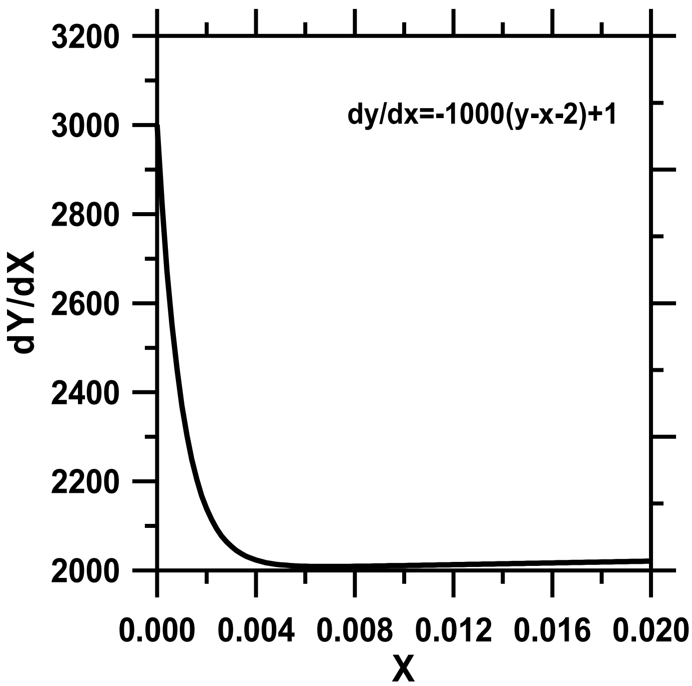
São equações que apresentam termos da derivada que variam muito rapidamente em diferentes faixas de integração. Os métodos tradicionais de integração divergem rapidamente para estas equações.

Exemplo

$$y(x) = -e^{-1000x} + x + 2$$

$$y'(x) = -1000[y - (x+2)] + 1$$





Exemplos

OFFICE

CI = condição inicial
CC =condição de contorno

Euler Explícito

h = passo de integração

ODE

$$\frac{dy}{dt}=\frac{y}{2} \quad , \quad CI \quad y(0)=1$$

Solução

$$y=e^{t/2}$$

	A	B	C
1	**t**	**y**	**y'**
2	0	1	B2/2
3	A2+h	B2+h*C2	...

Runge-Kutta 2a ordem

$Y_{n+1}=Y_n+J2$

	A	B	C	D	E	F
1	**t**	**y**	**t1**	**y1**	**y'1**	**delta y1**
2	0	1	A2	B2	B2/2	h*E2
3	A2+h	Y_{n+1}	...	...	...	...

	G	H	I	J
1	**t2**	**y2**	**y'2**	**delta y2**
2	A2+h/2	B2+F2/2	H2/2	h*I2
3	...	...	...	...

Runge-Kutta 4a ordem

h = passo de integração

$Y_{n+1}=Y_n+1/6*(F2+2*J2+2*N2+R2)$

	A	B	C	D	E	F
1	**t**	**y**	**t1**	**y1**	**y'1**	**delta y1**
2	0	1	A2	B2	B2/2	h*E2
3	A2+h	Y_{n+1}	...	...	...	...

	G	H	I	J
1	**t2**	**y2**	**y'2**	**delta y2**
2	A2+h/2	B2+F2/2	H2/2	h*I2
3	...	...	...	...

	K	L	M	N
1	**t3**	**y3**	**y'3**	**delta y3**
2	A2+h/2	B2+J2/2	L2/2	h*M2
3	...	...	...	...

	O	P	Q	R
1	**t4**	**y4**	**y'4**	**delta y4**
2	A2+h	B2+N2	P2/2	h*Q2
3	...	...	...	...

Exemplos (cont.)

ODE

$$\frac{dy}{dt}=\frac{y}{2} \quad , \quad CI \quad y(0)=1$$

Solução

$$y=e^{t/2}$$

Euler Explícito

delta t = 0,4

t	y	y'	y exato	Erro(%)
0,00	1,00000	0,50000	1,00000	0,0000
0,40	1,20000	0,60000	1,22140	1,7523
0,80	1,44000	0,72000	1,49182	3,4739
1,20	1,72800	0,86400	1,82212	5,1653
1,60	2,07360	1,03680	2,22554	6,8271

delta t = 0,1

t	y	y'	y exato	Erro(%)
0,00	1,00000	0,50000	1,00000	0,0000
0,10	1,05000	0,52500	1,05127	0,1209
0,20	1,10250	0,55125	1,10517	0,2417
0,30	1,15763	0,57881	1,16183	0,3623
0,40	1,21551	0,60775	1,22140	0,4828
0,50	1,27628	0,63814	1,28403	0,6031
0,60	1,34010	0,67005	1,34986	0,7233
0,70	1,40710	0,70355	1,41907	0,8433
0,80	1,47746	0,73873	1,49182	0,9632
0,90	1,55133	0,77566	1,56831	1,0829
1,00	1,62889	0,81445	1,64872	1,2025
1,10	1,71034	0,85517	1,73325	1,3220
1,20	1,79586	0,89793	1,82212	1,4413
1,30	1,88565	0,94282	1,91554	1,5605
1,40	1,97993	0,98997	2,01375	1,6795
1,50	2,07893	1,03946	2,11700	1,7984
1,60	2,18287	1,09144	2,22554	1,9171

delta t = 0,05

t	y	y'	y exato	Erro(%)
0,00	1,00000	0,50000	1,00000	0,0000
0,05	1,02500	0,51250	1,02532	0,0307
0,10	1,05063	0,52531	1,05127	0,0615
0,15	1,07689	0,53845	1,07788	0,0922
0,20	1,10381	0,55191	1,10517	0,1229
0,25	1,13141	0,56570	1,13315	0,1536
0,30	1,15969	0,57985	1,16183	0,1843
0,35	1,18869	0,59434	1,19125	0,2149
0,40	1,21840	0,60920	1,22140	0,2456
0,45	1,24886	0,62443	1,25232	0,2763
0,50	1,28008	0,64004	1,28403	0,3069
		...		
1,55	2,15001	1,07500	2,17059	0,9484
1,60	2,20376	1,10188	2,22554	0,9788

Exemplos (cont.)

ODE

$$\frac{dy}{dt}=\frac{y}{2} \quad , \quad CI \quad y(0)=1$$

Solução

$$y=e^{t/2}$$

Runge-Kutta 2ª ordem

delta t = 0,2

t	y	t1=t	y1=y	y'1	delta y1=deltat*y'1
0,00	1,00000	0,00000	1,00000	0,50000	0,10000
0,20	1,10500	0,20000	1,10500	0,55250	0,11050
0,40	1,22103	0,40000	1,22103	0,61051	0,12210
0,60	1,34923	0,60000	1,34923	0,67462	0,13492
0,80	1,49090	0,80000	1,49090	0,74545	0,14909
1,00	1,64745	1,00000	1,64745	0,82372	0,16474
1,20	1,82043	1,20000	1,82043	0,91021	0,18204
1,40	2,01157	1,40000	2,01157	1,00579	0,20116
1,60	2,22279	1,60000	2,22279	1,11139	0,22228

t2=t+deltat/2	y2=y+deltay1/2	y'2	deltay2=deltat*y'2	y exato	Erro(%)
0,10000	1,05000	0,52500	0,10500	1,00000	0,0000
0,30000	1,16025	0,58013	0,11603	1,10517	0,0155
0,50000	1,28208	0,64104	0,12821	1,22140	0,0309
0,70000	1,41669	0,70835	0,14167	1,34986	0,0464
0,90000	1,56545	0,78272	0,15654	1,49182	0,0618
1,10000	1,72982	0,86491	0,17298	1,64872	0,0773
1,30000	1,91145	0,95573	0,19115	1,82212	0,0928
1,50000	2,11215	1,05608	0,21122	2,01375	0,1082
1,70000	2,33393	1,16696	0,23339	2,22554	0,1237

Exemplos (cont.)

ODE

$$\frac{dy}{dt}=\frac{y}{2} \quad , \quad CI \quad y(0)=1$$

Solução

$$y=e^{t/2}$$

Runge-Kutta 4ª ordem

delta t = 0,4

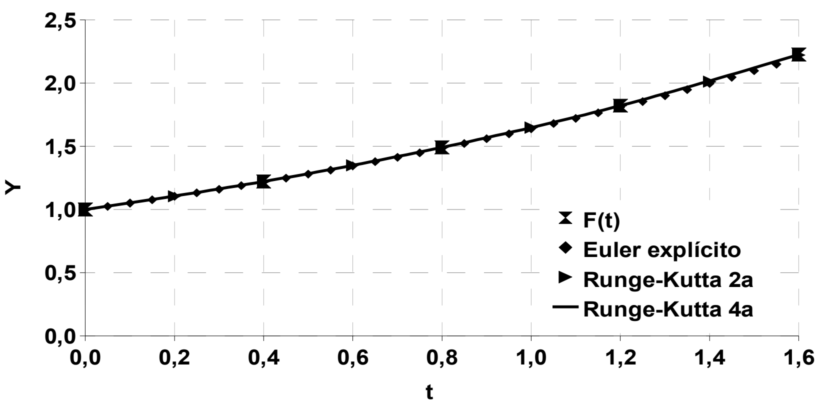
t	y	t1=t	y1=y	y'1	delta y1=deltat*y'1
0,00	1,00000	0,00000	1,00000	0,50000	0,20000
0,40	1,22140	0,40000	1,22140	0,61070	0,24428
0,80	1,49182	0,80000	1,49182	0,74591	0,29836
1,20	1,82211	1,20000	1,82211	0,91105	0,36442
1,60	2,22552	1,60000	2,22552	1,11276	0,44510

t2=t+deltat/2	y2=y+deltay1/2	y'2	deltay2=deltat*y'2
0,20000	1,10000	0,55000	0,22000
0,60000	1,34354	0,67177	0,26871
1,00000	1,64100	0,82050	0,32820
1,40000	2,00432	1,00216	0,40086
1,80000	2,44807	1,22404	0,48961

t3=t+deltat/2	y3=y+deltay2/2	y'3	delta y3=deltat*y'3
0,20000	1,11000	0,55500	0,22200
0,60000	1,35575	0,67788	0,27115
1,00000	1,65592	0,82796	0,33118
1,40000	2,02254	1,01127	0,40451
1,80000	2,47033	1,23516	0,49407

t4=t+deltat	y4=y+deltay3	y'4	delta y4=deltat*y'4
0,40000	1,22200	0,61100	0,24440
0,80000	1,49255	0,74628	0,29851
1,20000	1,82300	0,91150	0,36460
1,60000	2,22661	1,11331	0,44532
2,00000	2,71959	1,35979	0,54392

y exato	Erro(%)
1,00000	0,0000
1,22140	0,0002
1,49182	0,0005
1,82212	0,0007
2,22554	0,0009



Exemplos (cont.)

SCILAB

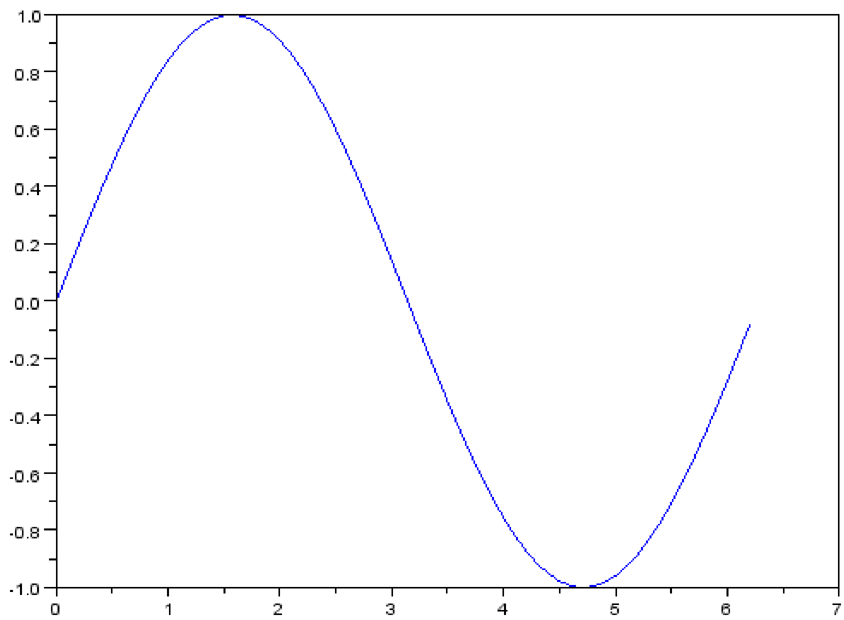
ODE

$$\frac{dy}{dt} = y^2 - y\,sen(t) + \cos(t)$$
$$CI \quad y(0) = 0$$

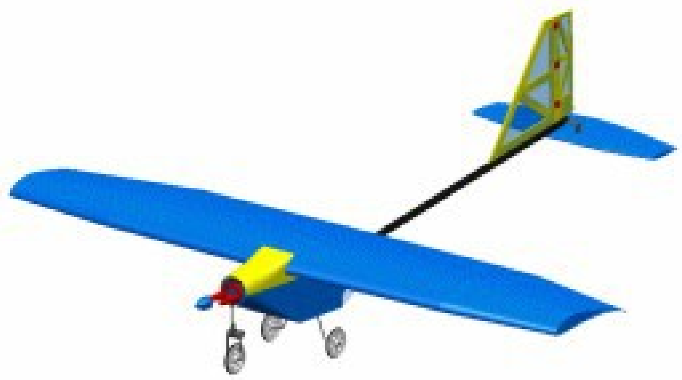
rk = método de Runge-Kutta de quarta ordem adaptativo

```
function ydot=f(t,y), ydot=y^2-y*sin(t)+cos(t) ,endfunction
y0=0; t0=0; t=0:0.1:2*%pi;
y=ode('rk',y0,t0,t,f)
plot(t,y)
```

plot = comando para apresentar um gráfico 2D



Exercício



Aeronave da equipe do CEFET-MG em 2002

A competição *SAE Aerodesign* consiste no projeto de uma aeronave radiocontrolada conforme limitações impostas pela organização da prova, visando a maior carga útil possível (www.saebrasil.org.br). O recorde atual é de 12,5 kg. O avião pesa em média 3 kg contando com o combustível. Calcular usando as informações abaixo, a velocidade da aeronave a 61 m da partida e a distância de decolagem. Deve-se usar dois métodos de integração de ODE's (Euler Explícito e Runge-Kutta de 2ª ordem) e comparar os resultados por meio de gráficos. As duas equações diferenciais que modelam o movimento do avião são definidas a seguir:

Obs: Resolver separadamente o movimento em x (posição) e em y (altitude)!

$$\frac{dv}{dt}=\frac{1}{M}\left[E-\frac{1}{2}C_d\,\rho\,v^2 A_d\right] \qquad se\ P\leqslant L$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{1}{M}\left[E-\frac{1}{2}C_d\,\rho\,v^2 A_d-\mu\,(P-L)\right] \qquad se\ P>L$$

$$\frac{dx}{dt}=v$$

$$\frac{dy}{dt}=0 \qquad se\ L\leqslant P$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{M}(L-P)\,t \qquad se\ L>P$$

$$onde,\ L=\frac{1}{2}C_s\,\rho\,v^2 A_s \qquad e \qquad P=M\,g$$

Peso da aeronave: 3 kg
Carga útil: 10 kg
Peso na decolagem (M): 13 kg

Empuxo do motor a plena carga (E): 35 N

Massa específica do ar (ρ): 1,22 kg/m^3
Coeficiente de arrasto (C_d): 0,1
Área de referência do arrasto (área transversal da fuselage) (A_d): 0,0176 m^2

Coeficiente de resistência ao rolamento (μ): 0,01

Coeficiente de sustentação (C_s): 2,0
Área de referência da sustentação (projeção horizontal da asa) (A_s): 0,3750 m^2

Distância máxima de decolagem (x_{max}): 61 m

Altitude inicial (y): 0 m
Posição inicial (x): 0 m
Velocidade inicial (v): 0 m/s