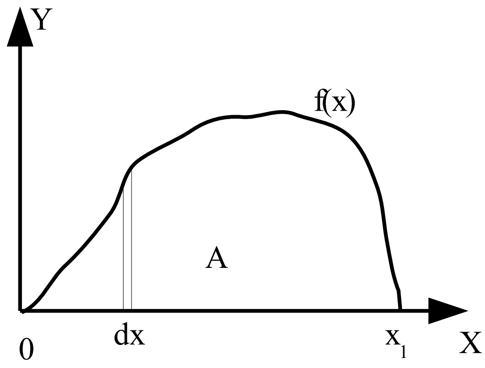
Cap. 7.- Integração Numérica

7.1. Definição

Seja uma função contínua Y = f(x), a área sobre a curva até o eixo X é dada pela integral da função no intervalo especificado.



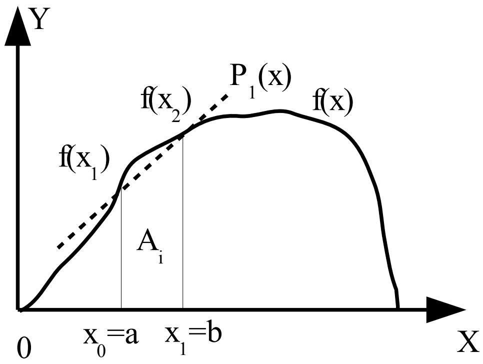
$$Área = A = \int_0^{x_1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x) \Delta x$$

Usos

- Cálculo de área
- Cálculo de volume
- Cálculo de massa
- Cálculo de propriedades de inércia

7.2. Regra dos trapézios

Aproximação da integral usando elementos trapezoidais de pequena altura em relação ao intervalo de integração.



h = passo de integração

definindo, h = b-a

Área do trapézio

$$A_i = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)]$$

e

Área total

$$A = \sum_{i=0}^{n} A_i$$

7.2. Regra dos trapézios (cont.)

onde, n-1= número de intervalos de integração

Desenvolvendo a equação de integração numérica temos,

$$A=\frac{h}{2}(y_0+y_1)+\frac{h}{2}(y_1+y_2)+\frac{h}{2}(y_2+y_3)+...+\frac{h}{2}(y_{n-1}+y_n)$$

Regra dos trapézios

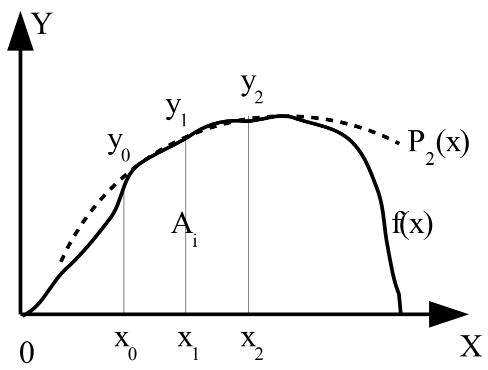
$$A=\frac{h}{2}(y_0+2y_1+2y_2+2y_3+...+2y_{n-1}+y_n)$$

O erro de truncamento é proporcional ao cubo do passo de integração e inversamente proporcional ao quadrado do número de pontos.

$$\epsilon\propto\frac{(b-a)^3}{n^2}$$

7.3. Regra de Simpson

Este método usa um polinômio interpolador de segundo grau para integrar entre 3 pontos igualmente espaçados.



Primeira regra de Simpson

Proveniente da integração do polinômio interpolador de Gregory-Newton

$$A_i=\frac{h}{3}[y_0+4y_1+y_2]$$

O número de subintervalos de integração n deve ser sempre par!

Para integrar sobre toda a curva deve-se dividir o intervalo de integração em n subintervalos iguais de amplitude h e a cada par de intervalos aplicar a primeira regra de Simpson.

Regra do 1/3

$$A=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+...+2y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n)$$

7.3. Regra de Simpson (cont.)

Caso o número de subintervalos n seja múltiplo de 3, pode-se usar a segunda regra de Simpson que utiliza um polinômio interpolador de terceiro grau.

Regra dos 3/8

$$A=\frac{3h}{8}\left(y_0+3y_1+3y_2+2y_3+3y_4+3y_5+2y_6+\ldots+3y_{n-2}+3y_{n-1}+y_n\right)$$

O erro de truncamento é proporcional a quinta potência do passo de integração e inversamente proporcional a quarta potência do número de pontos.

$$\epsilon \propto \frac{(b-a)^5}{n^4}$$

7.4. Forma de solução

Regra dos trapézios

i	x_i	y_i	$coef_i$	$coef_i*y_i$
0			1	
1			2	
2			2	
...			...	
n-1			2	
n			1	
h=	x_1-x_0			∑
			A=	h/2*∑

Outros métodos

Trocar apenas a coluna de coeficientes “i” para os valores de constantes do método empregado.

Cap. 7.- Integração Numérica

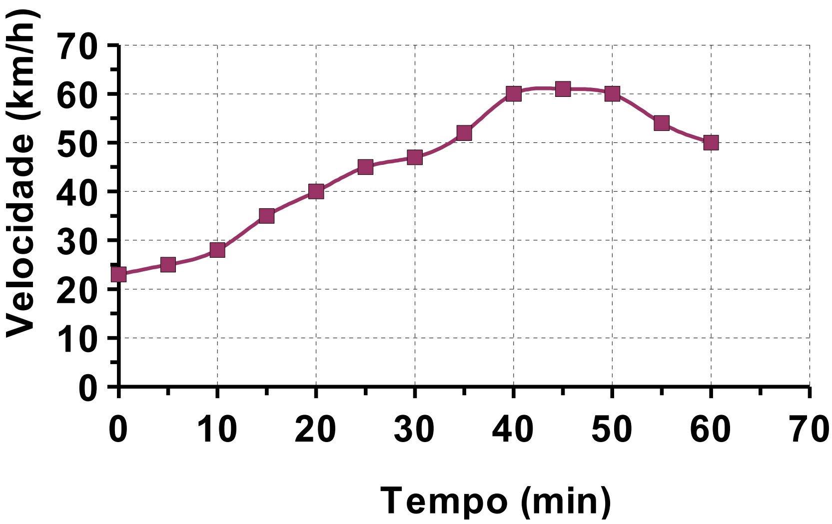
Exemplo

O tacômetro de um veículo registrou as velocidades instantâneas mostradas na tabala a seguir.
Calcular a distância percorrida pelo veículo.

Dados do tacômetro Tabela

i	Tempo(min)	V(km/h)
0	0	23
1	5	25
2	10	28
3	15	35
4	20	40
5	25	45
6	30	47
7	35	52
8	40	60
9	45	61
10	50	60
11	55	54
12	60	50

Dados do tacômetro Gráfico



Integração pela regra dos trapézios

i	xi	yi	coefi	coefi*yi	
0	0	23	1	23	
1	5	25	2	50	
2	10	28	2	56	
3	15	35	2	70	
4	20	40	2	80	
5	25	45	2	90	
6	30	47	2	94	
7	35	52	2	104	
8	40	60	2	120	
9	45	61	2	122	
10	50	60	2	120	
11	55	54	2	108	
12	60	50	1	50	
			∑=	**1087**	
h=	5	min	**A=**	**45,29**	km
	0,08	h	**V média=**	**45,29**	km/h

Cap. 7.- Integração Numérica

Exemplo (cont.)

Integração pela regra de Simpson

i	xi	yi	coefi	coefi*yi	
0	0	23	1	23	
1	5	25	4	100	
2	10	28	2	56	
3	15	35	4	140	
4	20	40	2	80	
5	25	45	4	180	
6	30	47	2	94	
7	35	52	4	208	
8	40	60	2	120	
9	45	61	4	244	
10	50	60	2	120	
11	55	54	4	216	
12	60	50	1	50	
			∑=	**1631**	
h=	5	min	**A=**	**45,31**	km/h
	0,08	h	**V média=**	**45,31**	km/h

Integração pela regra dos 3/8

i	xi	yi	coefi	coefi*yi	
0	0	23	1	23	
1	5	25	3	75	
2	10	28	3	84	
3	15	35	2	70	
4	20	40	3	120	
5	25	45	3	135	
6	30	47	2	94	
7	35	52	3	156	
8	40	60	3	180	
9	45	61	2	122	
10	50	60	3	180	
11	55	54	3	162	
12	60	50	1	50	
			∑=	**1451**	
h=	5	min	**A=**	**45,34**	km/h
	0,08	h	**V média=**	**45,34**	km/h

Cap. 7.- Integração Numérica

Exercício 7.1

Calcular o volume de uma garrafa plástica cujo perfil é dado na tabela abaixo, usando as regras do Trapézio e a de Simpson. Observar que a função a ser integrada é:

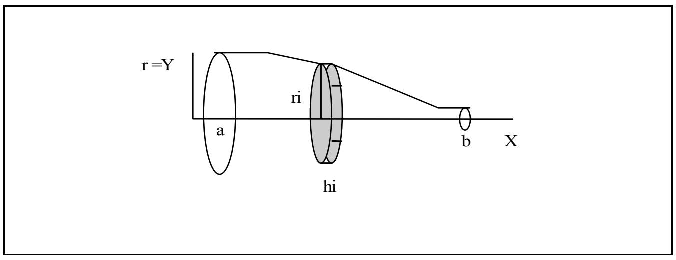
$$V_i = \pi r_i^2 h_i$$

Assim,

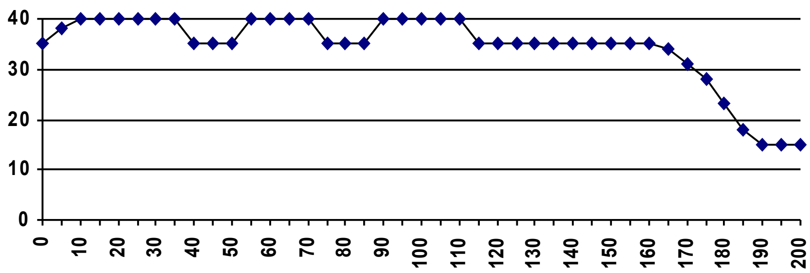
Obs: x_i *e* r_i *estão em [mm], mas dar o resultado de volume total em [ml]*

$$V = \int_a^b \pi\, r^2 dx$$

Elemento infinitesimal de volume



Medição dos raios das seções da garrafa



Dados		**Cont.**	
x_i	r_i	x_i	r_i
0	35	105	40
5	38	110	40
10	40	115	35
15	40	120	35
20	40	125	35
25	40	130	35
30	40	135	35
35	40	140	35
40	35	145	35
45	35	150	35
50	35	155	35
55	40	160	35
60	40	165	34
65	40	170	31
70	40	175	28
75	35	180	23
80	35	185	18
85	35	190	15
90	40	195	15
95	40	200	15
100	40		