Cap. 5 - Ajuste de Curvas e Desenho de Gráficos

5.1. Ajuste de Curvas

Aplica-se a dados com desvio estatístico da média, tais como , medidas experimentais.

O processo consiste em encontrar a melhor curva que se ajusta aos dados.

Método dos Mínimos Quadrados

Para uma reta arbitrária, definimos,

Ponto dado (x_i, y_i)

Equação da reta $\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i$

Desvio ponto a ponto (resíduo) $d_i = y_i - \hat{y}_i$

Desvio total $D = \sum_{i=1}^{n} d_i^2$

ou seja,

$$D = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_1)^2$$

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i$$

$$D = \sum_{i=1}^{n} (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2$$

onde, n é o número de dados disponíveis.

Minimizando a função de desvio total, temos que as derivadas parciais devem ser nulas:

Minimização de uma função de duas variáveis (b_o , b_1)

$$\frac{\partial D}{\partial b_0} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - b_0 - b_1 x_i) = 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial b_1} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - b_0 - b_1 x_i) x_1 = 0$$

Vamos simplificar a simbologia dos somatórios do seguinte modo,

$$\sum_{i=1}^{n} \ldots = \sum \ldots$$

Obs:

$$d\left(\sum x\right) = \sum dx$$

$$\sum b_0 = n b_0$$

Assim,

$$\sum y_i - \sum b_0 - \sum b_1 x_i = 0$$
$$\sum x_i y_i - \sum b_0 x_i - \sum b_1 x_i^2 = 0$$

5.1. Ajuste de Curvas (cont.)

Sistema de equações lineares resultantes,

$$\mathbf{A} . \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix}$$

Solução

$$\mathbf{A}^{-1} . \mathbf{B} = \mathbf{X}$$

$$b_1 = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b_0 = \frac{\sum y_i - (\sum x_i) b_1}{n}$$

Obs: São ajustes diferentes

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i$$
$$\hat{x}_i = a_0 + a_1 y_i$$

A equação da reta que apresenta menor desvio vertical em relação aos dados é,

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i$$

Para determinar a qualidade do ajuste é definido um índice chamado de Coeficiente de determinação (ou correlação):

$$0 \leqslant R^2 \leqslant 1$$

O R^2 quanto mais perto da unidade, melhor é o ajuste!

$$R^2 = \frac{\left[\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n} \right]^2}{\left[\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n} \right] \left[\sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n} \right]}$$

Ajustes exponenciais e logarítmicos podem ser feitos a partir do ajuste linear, trocando-se as variáveis, do seguinte modo:

$$y = a x^n$$

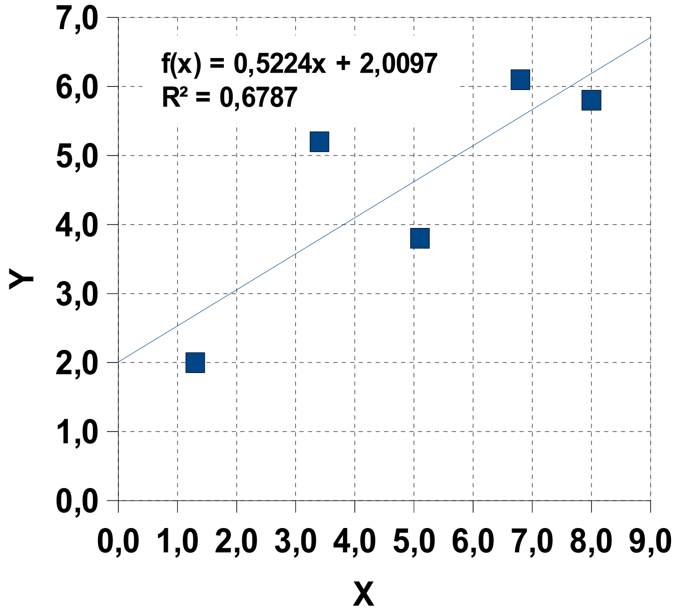
$$\log y = \log(a x^n)$$
$$\log y = \log a + n \log x$$

$$\bar{y} = \log y$$
$$A = \log a$$
$$\bar{x} = \log x$$

$$\bar{y} = A + n \bar{x}$$

5.1. Ajuste de Curvas (cont.)

Exemplo



n=	i	xi	yi	xi^2	yi^2	xi*yi
	1	1,3	2,0	1,7	4,0	2,6
	2	3,4	5,2	11,6	27,0	17,7
	3	5,1	3,8	26,0	14,4	19,4
	4	6,8	6,1	46,2	37,2	41,5
n=	5	8,0	5,8	64,0	33,6	46,4
	∑	24,6	22,9	149,5	116,3	127,5

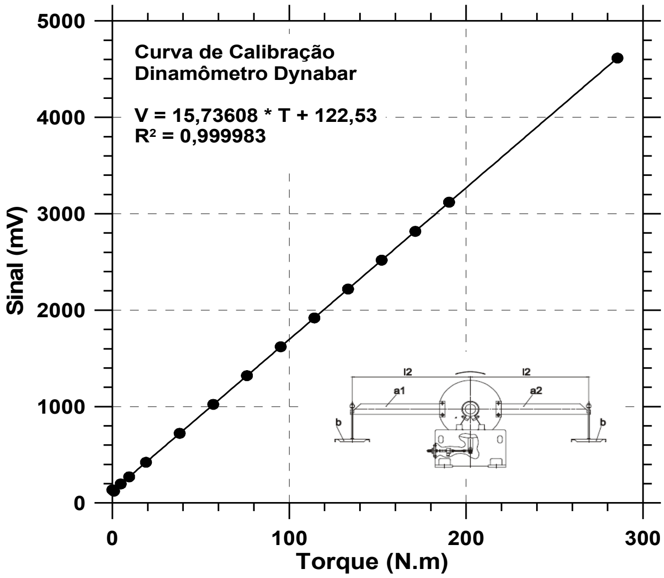
b1=	0,5224
b0=	2,0097
R^2=	0,6787
y(7)=	5,7

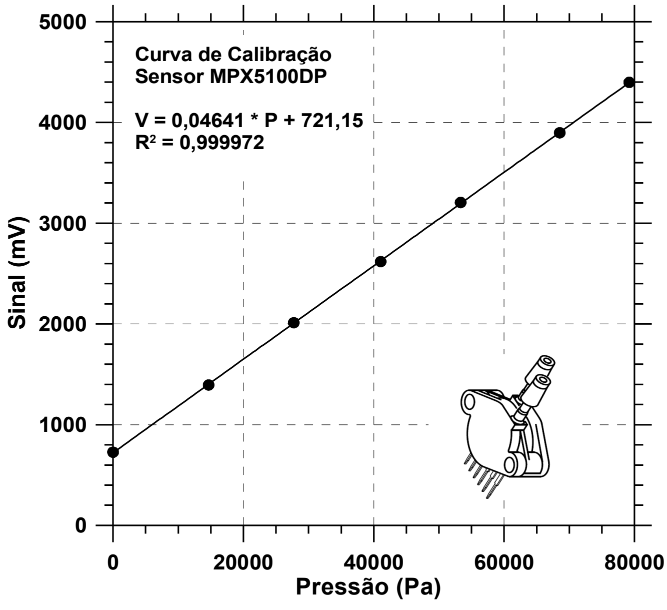
5.2. Desenho de Gráficos

Ao se elaborar um gráfico deve-se atentar para os seguintes aspectos:

- Deve-se completar todos os itens do gráfico para permitir uma leitura isolada do gráfico.
- O gráfico deve ocupar uma aba de planilha independente!
- As letras devem ser grandes!
- As linhas devem ser grossas!
- Usar linhas de grade!
- Dados experimentais devem ser representadospor pontos!
- Dados de simulação ou interpolações devem ser representados por linhas!
- Evitar o uso de muitas cores nos gráficos!

Exemplos





Cap. 5 - Exercícios