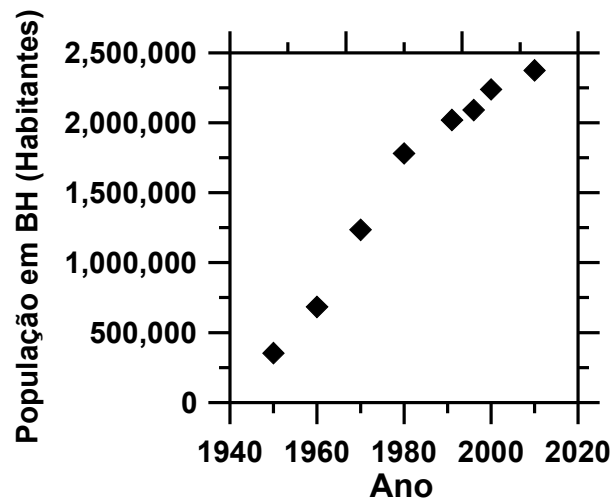


Cap. 4- Interpolação Numérica

4.1. Definições

Censos de BH



Ano	1950	1960	1970	1980	1991	1996	2000	2010
No. habitantes	352.724	683.908	1.235.030	1.780.855	2.020.161	2.091.371	2.238.526	2.375.444

Qual o número de habitantes na cidade de Belo Horizonte em 1975?

Interpolar

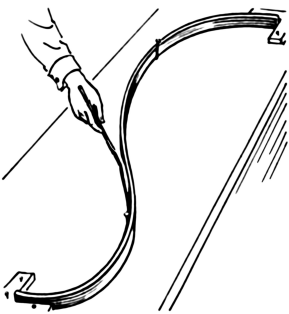
Encontrar o valor da função para um ponto contido no intervalo dos dados experimentais.

Extrapolar

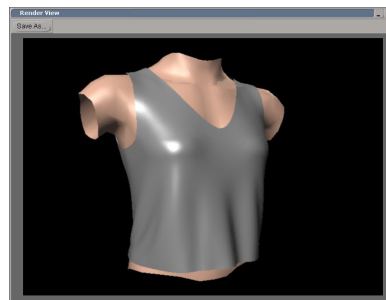
Encontrar o valor da função para um ponto fora do intervalo dos dados experimentais (ex: população em BH no ano 2020).

Tipos de interpolação

- Linear
- Polinomial
- Exponencial
- Logarítmica
- Trigonométrica
- Diferencial – usada em programas de cálculo discretizado (elementos finitos, volumes finitos e diferenças finitas)
- “Spline” – usada para gerar curvas suaves a partir de pontos discretos

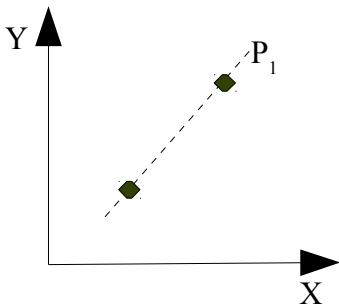


Spline original



Spline 3D = NURBS (Non Uniform Rational Basis Spline)

4.2. Interpolação Linear



Seja a função

$$y = f(x)$$

Cujos pontos conhecidos são

$$(x_0, y_0)$$

$$(x_1, y_1)$$

Deseja-se calcular y para um dado x entre x_0 e x_1 , usando interpolação linear.

Considerando um polinômio interpolador de primeira ordem, temos,

$$P_1(x) = a_1 x + a_0$$

e

$$P_1(x_0) = y_0$$

$$P_1(x_1) = y_1$$

Assim,

$$a_1 x_0 + a_0 = y_0$$

$$a_1 x_1 + a_0 = y_1$$

ou,

$$a_1 = (y_0 - y_1) / (x_0 - x_1)$$

$$a_0 = y_0 - a_1 x_0$$

O valor a ser interpolado é estimado usando o polinômio interpolador e os coeficientes acima determinados.

$$y = f(x) \approx P_1(x) = a_1 x + a_0$$

Erros de interpolação

Truncamento – diferença entre o valor da função exata no ponto e o valor estimado pelo polinômio interpolador

$$\epsilon(x) = f(x) - P_n(x)$$

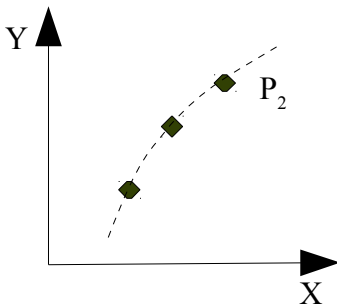
Arredondamento – proveniente de limitação de casas decimais nas operações algébricas até obter os resultados. Deve-se armazenar os coeficientes para cálculos das estimativas com o maior número de casas decimais possíveis.

4.2. Interpolação Linear (cont.)

Exemplo

Calculando usando a regra de três:
 $P_1(1975) = 1.507.943$ habitantes

4.3. Interpolação Quadrática



Exemplo

Calcular $f(\pi/5)$ por interpolação quadrática.

A função de interpolação passa pelos pontos dados!

População	
Ano	Habitantes
1970	1235030
1975	y
1980	1780855

Usando as fórmulas:

$$a_1 = (1235030 - 1780855) / (1970 - 1980) = 54.583$$

$$a_0 = 1235030 - 54583 * 1970 = -106.292.495$$

$$P_1(1975) = 54583 * 1975 - 106292495 = 1.507.943 \text{ habitantes}$$

Usa-se um polinômio interpolador de segunda ordem:

$$P_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Agora são necessários 3 pontos para encontrar os coeficientes de $P_2(x)$,

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1) \text{ e } (x_2, y_2)$$

Portanto,

$$a_2 x_0^2 + a_1 x_0 + a_0 = y_0$$

$$a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0 = y_1$$

$$a_2 x_2^2 + a_1 x_2 + a_0 = y_2$$

Resolvendo este sistema linear, obtemos a_0 , a_1 e a_2 .

$f(x) = \frac{2 \operatorname{sen}^2 x}{x + 1}$		
x	sen(x)	f(x)
0	0	0
$\pi/6$	1/2	0,328
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	0,560

$$P_2(0) = 0 a_2 + 0 a_1 + a_0 = 0$$

$$P_2(\pi/6) = 0,274 a_2 + 0,524 a_1 + a_0 = 0,328$$

$$P_2(\pi/4) = 0,617 a_2 + 0,785 a_1 + a_0 = 0,560$$

4.3. Interpolação Quadrática (cont.)

Exemplo

Valor interpolado

Valor real

Erro na interpolação

Solução $a_0=0; a_1=0,452; a_2=0,333$

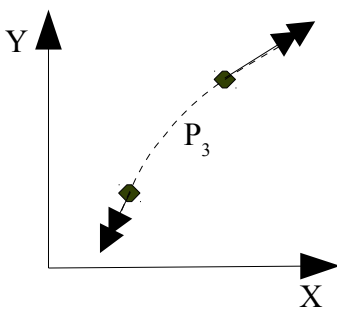
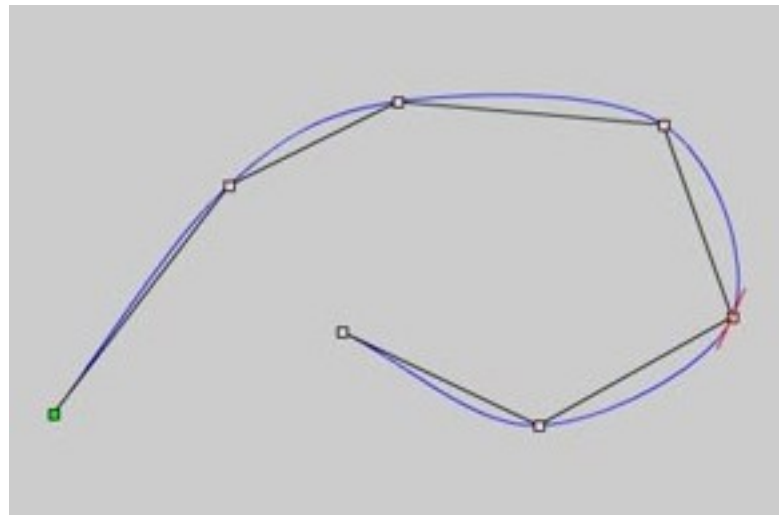
$$P_2(\pi/5) = 0,333(\pi/5)^2 + 0,452(\pi/5) = 0,415$$

$$f(\pi/5) = \frac{2 \operatorname{sen}^2(\pi/5)}{\pi/5 + 1} = 0,424$$

$$E_i(\pi/5) = f(\pi/5) - P_2(\pi/5) = 0,009 = 9 \times 10^{-3} = O(10^{-2})$$

4.4. Interpolação Cúbica (Spline)

Spline versus Interpolação Linear



Derivadas primeira e segunda do polinômio de terceira ordem (cúbica).

Usa-se um polinômio interpolador de terceira ordem:

$$P_3(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Portanto, seriam necessários 4 pontos para encontrar os coeficientes de $P_3(x)$, mas a técnica utiliza apenas dois pontos e a informação de derivada nas extremidades do segmento considerado.

$$(x_0, y_0) \text{ e } (x_1, y_1)$$

$$\frac{dP_3(x)}{dx} = 3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1$$

$$\frac{d^2 P_3(x)}{dx^2} = 6a_3 x + 2a_2$$

4.4. Interpolação Cúbica (cont.)

Sistema linear para encontrar os coeficientes.

As derivadas primeira são calculadas numericamente usando os pontos adjacentes ao segmento a ser interpolado.

$$P_3(x_0) = a_3 x_0^3 + a_2 x_0^2 + a_1 x_0 + a_0 = y(x_0)$$

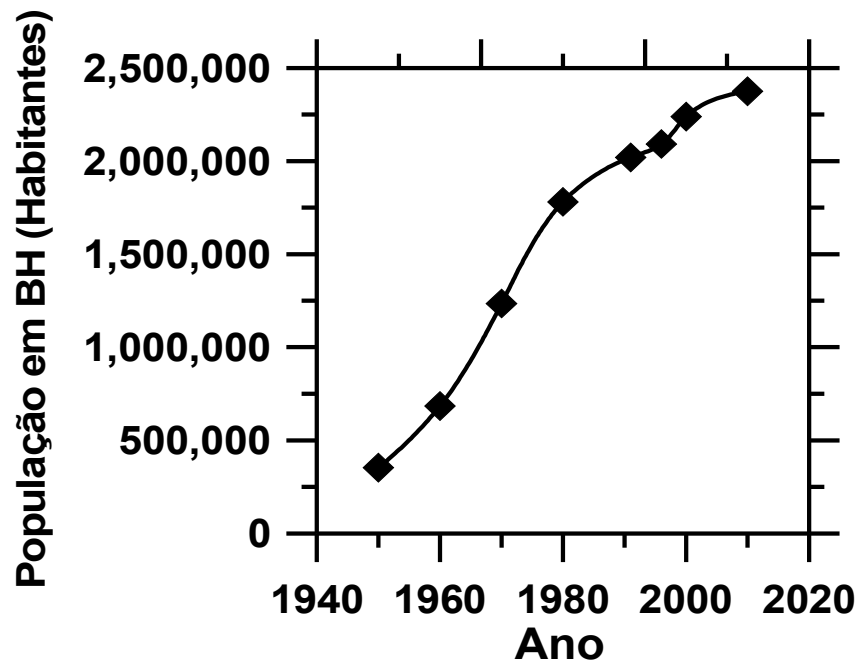
$$P_3(x_1) = a_3 x_1^3 + a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0 = y(x_1)$$

$$\frac{d P_3(x_0)}{dx} = 3 a_3 x_0^2 + 2 a_2 x_0 + a_1 = y'(x_0)$$

$$\frac{d P_3(x_1)}{dx} = 3 a_3 x_1^2 + 2 a_2 x_1 + a_1 = y'(x_1)$$

$$A = \begin{bmatrix} x_0^3 & x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ 3x_0^2 & 2x_0 & 1 & 0 \\ 3x_1^2 & 2x_1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y'(x_0) \\ y'(x_1) \end{bmatrix}$$

Exemplo



Spline Natural

Neste tipo de spline, as derivadas segunda do polinômio nas extremidades do segmento são iguais a zero.

$$P_3(x_0) = a_3 x_0^3 + a_2 x_0^2 + a_1 x_0 + a_0 = y(x_0)$$

$$P_3(x_1) = a_3 x_1^3 + a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0 = y(x_1)$$

$$\frac{d^2 P_3(x_0)}{dx^2} = 6 a_3 x_0 + 2 a_2 = 0$$

$$\frac{d^2 P_3(x_1)}{dx^2} = 6 a_3 x_1 + 2 a_2 = 0$$

4.4. Interpolação Cúbica (cont.)

Spline Natural

Sistema linear para encontrar os coeficientes.

$$A = \begin{bmatrix} x_0^3 & x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ 6x_0 & 2 & 0 & 0 \\ 6x_1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cap. 4 – Exercícios

Qual a população de Bh em 1975?

Spline

1960	683.908	habitantes	$y(x_0) =$	55112
1970	1.235.030	habitantes		
1975	y			
1980	1.780.855	habitantes	$y(x_1) =$	21755
1991	2.020.161	habitantes		

A =	7645373000	3880900	1970	1	A ⁻¹ =	2,0000E-03	-2,0000E-03	1,0000E-02	1,0000E-02
	7762392000	3920400	1980	1		-1,1850E+01	1,1850E+01	-5,9300E+01	-5,9200E+01
	11642700	3940	1	0		2,3404E+04	-2,3404E+04	1,1722E+05	1,1682E+05
	11761200	3960	1	0		-1,5407E+07	1,5407E+07	-7,7232E+07	-7,6842E+07

B =	1235030	Coef =	-3,2298E+02
	1780855		1,9120E+06
	55112		-3,7728E+09
	21755		2,4815E+12

P3(1975)= 1.549.639 Habitantes

Spline Natural

1960	683.908	habitantes	$y(x_0) =$	55112
1970	1.235.030	habitantes		
1975	y			
1980	1.780.855	habitantes	$y(x_1) =$	21755
1991	2.020.161	habitantes		

A =	7645373000	3880900	1970	1	A ⁻¹ =	3,8079E-22	-1,2083E-22	-1,6667E-02	1,6667E-02
	7762392000	3920400	1980	1		-2,2204E-18	7,2502E-19	9,9000E+01	-9,8500E+01
	11820	2	0	0		-1,0000E-01	1,0000E-01	-1,9602E+05	1,9404E+05
	11880	2	0	0		1,9800E+02	-1,9700E+02	1,2937E+08	-1,2742E+08

B =	1235030	Coef =	2,5511E-16
	1780855		-1,4511E-12
	0		5,4583E+04
	0		-1,0629E+08

P3(1975)= 1.507.943 Habitantes