Cap. 2.- Matrizes e Sistemas Lineares

2.1. Definição

Matriz é um conjunto organizado de números dispostos em linhas e colunas.

Representações

*Matriz retangular **A**, m x n (eme por ene)*

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} \;\; ou \;\; [A] \;\; ou \;\; (A) \;\; ou \;\; \|A\|$$

linha = rows
coluna = columns

a_{ij} é o elemento da matriz localizado na linha i e na coluna j

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij}) \;\; para \;\; i=1\ldots m \;\; e \;\; j=1\ldots n$$

2.2. Tipos

Matriz linha

m = 1 $\boldsymbol{A}=[1\,2\,3]$

Matriz coluna

n = 1 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$

Matriz quadrada de ordem n

m = n $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{bmatrix}$

Os elementos da diagonal principal são: a_{ij} para i = j $[1\,5\,9]$

Os elementos da diagonal secundária são: a_{ij} para i + j = n + 1 $[3\,5\,7]$

Matriz unitária

m = n = 1 $\boldsymbol{A}=[3]$

Matriz diagonal

Os elementos são: $a_{ij}=0$ para $i \neq j$ $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 5 & 0\\0 & 0 & 9\end{bmatrix}$

2.2. Tipos(cont.)

Matriz identidade

É a matriz diagonal onde: $a_{ij} = 1$ para $i = j$
$a_{ij} = 0$ para $i \neq j$

$$\boldsymbol{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*Matriz triangular superior (**U**) ("upper")*

Os elementos abaixo da diagonal principal são nulos.

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

*Matriz triangular inferior (**L**) ("lower")*

Os elementos acima da diagonal principal são nulos.

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz nula

Todos os elementos são nulos: $a_{ij} = 0 \quad \forall$ i e j

$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz oposta
A** = -**B

A é oposta de **B** se: $a_{ij} = -b_{ij} \quad \forall$ i e j

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 7 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -7 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Matriz idêntica
A** = **B

A é idêntica a **B** se: $a_{ij} = b_{ij} \quad \forall$ i e j

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \quad a=1\,;b=2\,;c=5\,;d=7$$

Matriz cheia

São matrizes com a maior parte dos elementos não nulos.

Matriz esparsa

São matrizes com a maior parte dos elementos nulos

Matriz de banda

São matrizes quadradas esparsas cuja diagonal principal e algumas diagonais paralelas a principal são compostas de elementos não nulos.

Matriz tridiagonal

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

2.3. Operações

Adição

C = ***A*** + ***B***

As matrizes são do mesmo tamanho m x n.

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad \forall \; i \;\; e \;\; j$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Propriedades

A + **B** = **B** + **A** comutativa
A + (B + C) = (A + B) +C associativa
A + **0** = **A**
A+(-A) = 0

Subtração
C = ***A*** - ***B***

C = **A** - **B** = **A** + (-**B**)

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 1 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$$

Multiplicação por um número k
C = *k* ***B***

$$c_{ij} = k \; b_{ij} \qquad \forall \, i \;\; e \;\; j$$

$$3\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 3 & -12 \end{bmatrix} \qquad 2\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Propriedades

Obs: *a e b podem ser números complexos*

a (b **A**) = (a b) **A**
a (**A** + **B**) = a **A** + a **B**
(a +b) **A** = a **A** + b **A**
1.**A** = **A**

Multiplicação
C = ***A.B***

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \quad m \times \boldsymbol{p}$$

$$\boldsymbol{B} = (b_{jk}) \quad \boldsymbol{p} \times n$$

$$\boldsymbol{C} = (c_{ik}) \quad m \times n$$

Definição indicial

$$onde \;\; c_{ik} = a_{i1} \; b_{1k} + a_{i2} \; b_{2k} + a_{i3} \; b_{3k} + \ldots + a_{ip} \; b_{pk}$$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk}$$

Obs: *matrizes quadradas devem ter a mesma ordem para poderem ser multiplicadas*

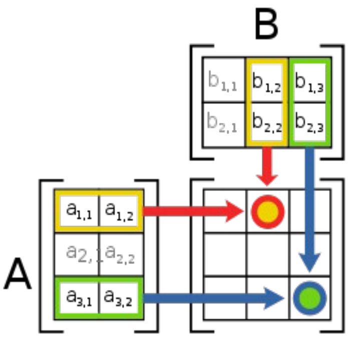
2.3. Operações (cont.)

Multiplicação
C = A.B

Definição esquemática

$$\begin{matrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ip} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ b_{3k} \\ \dots \\ b_{pk} \end{matrix} \quad \rightarrow \quad c_{ik}$$

$i-$*ésima linha de* ***A*** $\quad k-$*ésima coluna de* ***B*** $\quad$ *elemento ik de* ***C***



Wikipédia, 2009

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk}$$

$$\boldsymbol{A.B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 22 \\ 47 & 58 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B.A} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 38 \\ 31 & 54 \end{bmatrix}$$

$$\underset{2x3}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{3x1}{\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}} = \underset{2x1}{\begin{bmatrix} 14 \\ 13 \end{bmatrix}}$$

Propriedades

A.B ≠ B.A não é comutativa

A.B = 0 **≠> A = 0 ou B = 0**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(A.B).C = A.(B.C) associativa

(A+B).C = A.C+B.C distributiva a direita

C.(A+B) = C.A+C.B distributiva a esquerda

(k.A).B = A.(k.B) = k.(A.B) k = constante real ou imaginária

$\mathbf{A.I_n = I_m.A = A}$ **A** é uma matriz m x n

Matriz Transposta
$\mathbf{A^t}$

$\mathbf{A^t = (b_{ji})}$ **,** tipo m x n, é a matriz transposta de **A** = (a_{ij}), tipo n x m onde,

$b_{ji} = a_{ij} \quad \forall$ i e j

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 3 \\ \mathbf{4} & 1 \\ \mathbf{0} & 6 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{A^t} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 4 & 3 & 2 \\ 9 & 6 & 8 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B^t} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 5 & 3 & 6 \\ 7 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Propriedades

$\mathbf{(A+B)^t = A^t + B^t}$
$\mathbf{(kA)^t = kA^t}$
$\mathbf{(A.B)^t = B^t.A^t}$

$$\boldsymbol{A.B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 22 \\ 15 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B^t . A^t} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 15 \\ 22 & 15 \end{bmatrix} = (\boldsymbol{A.B})^t$$

Matriz simétrica

É a matriz quadrada cuja transposta é igual a matriz original:

$\mathbf{A^t = A}$ ou seja, $a_{ij} = a_{ji} \ \forall$ i e j $\quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Matriz anti-simétrica

É a matriz quadrada cuja transposta é igual a oposta da matriz original:

$\mathbf{A^t = -A}$ ou seja, $a_{ij} = -a_{ji} \ \forall$ i e j $\quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

2.4. Determinantes

Definição

Seja uma matriz quadrada $\boldsymbol{M}=(a_{ij})$, de ordem $\boldsymbol{n}$, chamamos determinante de $\boldsymbol{M}$, simbolizado por:

$$det\,\boldsymbol{M}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

a um número calculado por:

a) Para $n=1$ então $\boldsymbol{M}=(a_{11})$ e $det\,\boldsymbol{M}=a_{11}$

b) Para $n\geq 2$ então $$det\,M=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}D_{i1}$$

onde,

Menor complementar do elemento a_{i1} da matriz $\boldsymbol{M}$

D_{i1} é o determinante da matriz que se obtém de $\boldsymbol{M}$, suprimindo-se a linha $\boldsymbol{i}$ e a coluna $\boldsymbol{1}$.

Matriz quadrada de ordem 2

$$det\,\boldsymbol{M}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}a_{11}D_{11}+(-1)^{2+1}a_{21}D_{21}$$

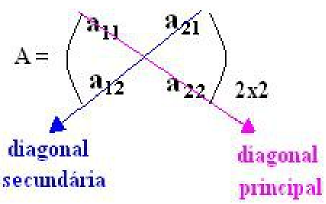
Menor Complementar

$$D_{11}=\begin{vmatrix} : & : \\ : & a_{22} \end{vmatrix} \qquad D_{21}=\begin{vmatrix} : & a_{12} \\ : & : \end{vmatrix}$$

Determinante 2x2

$$det\,\boldsymbol{M}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

Regra gráfica



Matriz quadrada de ordem 3

$$det\,\boldsymbol{M}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}a_{11}D_{11}+(-1)^{2+1}a_{21}D_{21}+(-1)^{3+1}a_{31}D_{31}$$

Menor Complementar

$$D_{11}=\begin{vmatrix} : & : & : \\ : & a_{22} & a_{23} \\ : & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_{21}=\begin{vmatrix} : & a_{12} & a_{13} \\ : & : & : \\ : & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_{31}=\begin{vmatrix} : & a_{12} & a_{13} \\ : & a_{22} & a_{23} \\ : & : & : \end{vmatrix}$$

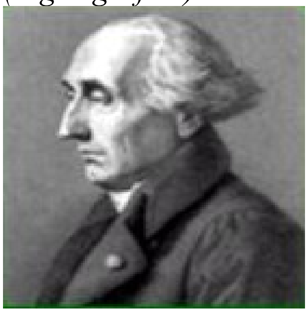
2.4. Determinantes (cont.)

Determinante 3x3

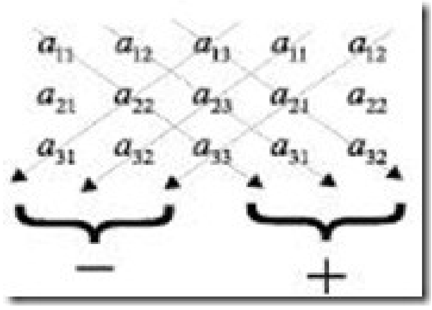
$$det\ \boldsymbol{M} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})$$

$$det\ \boldsymbol{M} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

Regra de Sarrus (regra gráfica)



Pierre Frédéric Sarrus 1798-1861



Matriz quadrada de ordem n>3

Definindo *Cofator do elemento a_{ij}* de uma matriz quadrada de ordem ***n***, por

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\, D_{ij}$$

Determinante nxn

$$det\ \boldsymbol{M} = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} A_{i1}$$

Propriedades

det M^t = det M

Se uma linha ou coluna da matriz ***M*** é constituída de elementos nulos, então ***det M = 0***

Se multiplicarmos uma linha ou coluna da matriz ***M*** por um número k, gerando uma nova matriz ***N***, então ***det N = k det M***

Se duas linhas ou colunas na matriz ***M*** forem iguais ou proporcionais, então ***det M = 0***

Numa matriz triangular superior ou inferior, temos

$$det\ \boldsymbol{M} = a_{11} a_{22} a_{33} \ldots a_{nn}$$

2.5. Matrizes inversíveis

Matriz Inversa (A^{-1})

Matriz inversa A^{-1} da matriz quadrada A, de ordem n, é definida por

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$$

Obs:

Se existir inversa, então a matriz A é dita *inversível* ou não singular;
Se não existe inversa, então a matriz A é chamada de *singular*;
Se a matriz A é inversível, então a sua inversa é *única*.

Matriz de Cofatores (A')

É a matriz composta pelos cofatores de cada elemento da matriz A.

$$A' = (A_{ij})$$

Matriz Adjunta ($\bar{A}$)

É a transposta da matriz de cofatores da matriz A.

$$\bar{A} = (A')^t$$

Teorema

Se A é uma matriz quadrada de ordem n, tal que, $D = \det A \neq 0$, então a inversa de A é,

$$A^{-1} = \frac{1}{D}\bar{A}$$

Gabriel Cramer
1704-1752

pois,

$$A\bar{A} = \bar{A}A = D\,I_n$$

$$\begin{array}{ll} D\,A^{-1} = \bar{A} & D\,A^{-1} = \bar{A} \\ D\,A\,A^{-1} = A\bar{A} & D\,A^{-1}A = \bar{A}A \\ D\,I_n = A\bar{A} & D\,I_n = \bar{A}A \end{array}$$

2.6. Matrizes em Planilhas e no SciLab

2.7. Resolução de Sistemas Lineares

2.7.1. Representação

Notação usual

$$S_n = \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

Notação indicial

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad i = 1..n$$

Notação matricial

$$\boldsymbol{A.X = B}$$

Matriz de coeficientes

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz de termos independentes

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Matriz de incógnitas

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

2.7.2. Solução

Se D = det $\boldsymbol{A} \neq 0$

Método de Cramer

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{A.X = B} \\ \boldsymbol{A^{-1}.(A.X) = A^{-1}.B} \\ \boldsymbol{(A^{-1}.A) = A^{-1}.B} \\ \boldsymbol{I_n.X = A^{-1}.B} \\ \boldsymbol{X = \tfrac{1}{D}\bar{A}.B} \end{array}$$

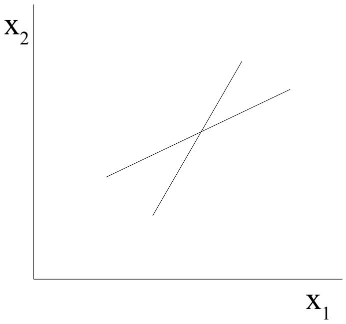
2.7.3. Classificação

Exemplo

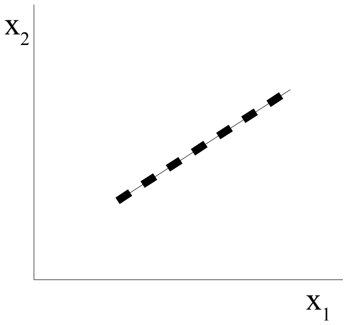
Sistema linear 2x2

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

Sistema determinado *det **A** ≠ 0* *solução única*

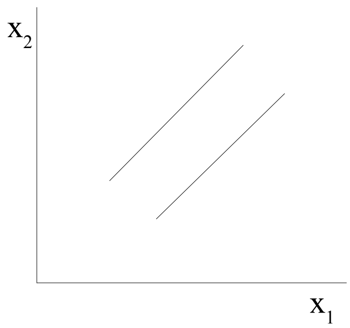


Sistema indeterminado *det **A** = 0* *múltiplas soluções*



Uma equação inconsistente!

Sistema incompatível *sem solução*

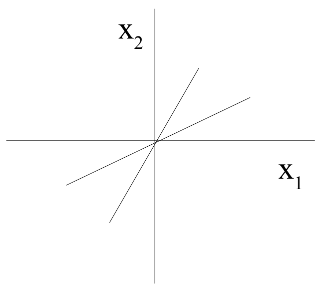


Uma equação redundante!

Sistema homogêneo ***B**=(0)*

Solução trivial ***X**=(0)*

Um sistema linear homogêneo sempre admite a solução trivial!



2.7.3. Classificação (cont.)

Sistema triangular

Admite um método de solução simplificado.

O sistema triangular superior é resolvido por *substituição retroativa*.

Exemplo

$$\boldsymbol{A.X=B}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & x_4 = 2/2 = 1 \\ & 4x_3 - 5 \cdot 1 = 3 \Rightarrow x_3 = 2 \\ & x_2 + 2 - 2 \cdot 1 = -1 \Rightarrow x_2 = -1 \\ & 3x_1 + 4 \cdot (-1) - 5 \cdot 2 + 1 = -10 \Rightarrow x_1 = 1 \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{X^t} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Obs

O sistema triangular inferior é resolvido por *substituição progressiva*.

2.7.4. Operações com Sistemas Lineares

Realizando as seguintes operações sobre as linhas de um sistema linear obtém-se uma sistema linear equivalente ao primeiro, ou seja, um novo sistema que possui a mesma solução:

- Trocar a posição de duas equações do sistema;
- Multiplicar uma equação do sistema por uma constante não nula;
- Adicionar duas equações do sistema.

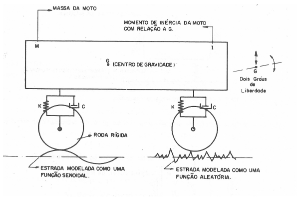
Obs

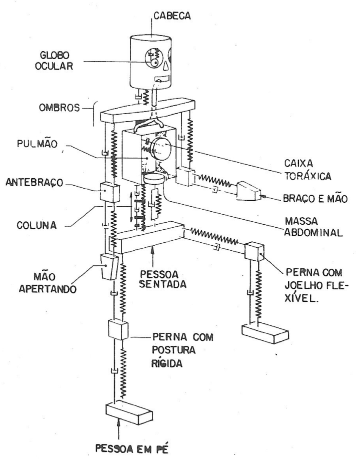
A troca de colunas na matriz de coeficientes somente altera a ordem dos termos na matriz solução X.

2.7.5. Aplicações

- Elétrica e Eletrônica
- Economia
- Engenharia Civil
- Engenharia Térmica
- Engenharia Aeronáutica
- Engenharia de Estruturas
- Otimização
- Computação Gráfica

2.7.5. Aplicações (cont.)

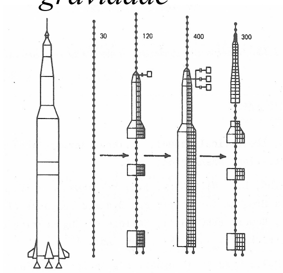




Força de uma mola

K é a constante da mola

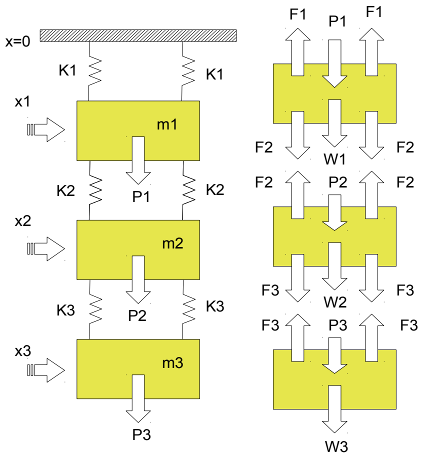
Força devido ao Peso Próprio
g é aceleração da gravidade



*A matriz de coeficientes **K** é chamada de matriz de rigidez do sistema e é simétrica.*

*O sistema homogêneo **P**=0 é usado em análise de vibrações naturais.*

Modelo de um sistema mecânico



2ª Lei de Newton no equilíbrio

$$\sum \vec{F}_{ext}=0$$

Diagrama de corpo livre

Massa 1: $$\sum F_x=2F_1-P_1-2F_2-W_1$$

Massa 2: $$\sum F_x=2F_2-P_2-2F_3-W_2$$

Massa 3: $$\sum F_x=2F_3-P_3-W_3$$

$$F_1=K_1 x_1$$
$$F_2=K_2(x_2-x_1)$$
$$F_3=K_3(x_3-x_2)$$

$$W_1=m_1 g$$
$$W_2=m_2 g$$
$$W_3=m_3 g$$

O sistema de equações lineares que modelam o problema é:

$$2(K_1+K_2)x_1-2K_2x_2=P_1+m_1 g$$
$$-2K_2x_1+2(K_2+K_3)x_2-2K_3x_3=P_2+m_2 g$$
$$-2K_3x_2+2K_3X_3=P_3+m_3 g$$

$$2\begin{bmatrix} K_1+K_2 & -K_2 & 0 \\ -K_2 & K_2+K_3 & -K_3 \\ 0 & -K_3 & K_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} m_1 g \\ m_2 g \\ m_3 g \end{bmatrix}$$

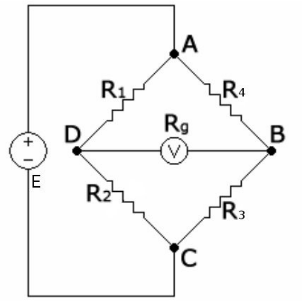
$$2\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}+\boldsymbol{W}$$

- para **P** = 0 o sistema está em equilíbrio devido ao peso próprio;
- para uma dada carga **P** os deslocamentos **X** são únicos;
- para uma carga cíclica **P** os deslocamentos **X** também são cíclicos.

2.7.5. Aplicações (cont.)

Instrumentação:

Ponte de Wheatstone



Uma Ponte de Wheatstone (ao lado) é um circuito elétrico usado para medição de sinais de vários tipos de sensores (de termistores a células de carga). O medidor de tensão, de resistência R_g, fica entre os terminais D e B da ponte. A fonte fornece uma força eletromotriz E ao circuito.

Vamos mostrar que para uma condição de equilíbrio na ponte, temos:

$$I_g = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{R_4}{R_3} = \frac{R_1}{R_2}$$

As leis que regem o fenômeno físico são:

Ao longo de qualquer circuito envolvendo a fonte.

Lei de Ohm $\qquad V = R.I$

Nós do circuito = pontos A, B, C e D na figura

Lei de Kirchhoff $\qquad \sum I_{nó} = 0$

O sistema de equações lineares que modelam o sistema é:

Nó D
Nó B
Circuito ADC
Circuito ABC
Circuito ADBC

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_g &= 0 \\ I_3 - I_4 + I_g &= 0 \\ R_1 I_1 + R_2 I_2 &= E \\ R_3 I_3 + R_4 I_4 &= E \\ R_1 I_1 + R_3 I_3 + R_g I_g &= E \end{aligned}$$

Na notação matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ R_1 & R_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & R_4 & 0 \\ R_1 & 0 & R_3 & 0 & R_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E \\ E \\ E \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\boldsymbol{A\,X = B}$$

Usar substituição progressiva!

Resolvendo o sistema para $I_g = 0$, obtemos,

$$\frac{R_4}{R_3} = \frac{R_1}{R_2}$$

2.7.6. Métodos Numéricos de Solução de Sistemas Lineares

Métodos Diretos

A solução é encontrada por métodos algébricos com um número fixos de operações. A solução é exata.

Recomendados para:

- Sistemas lineares pequenos (n<=1000).
- Matriz de coeficientes do tipo matriz cheia, onde a maioria dos elementos são não nulos ($a_{ij} \neq 0$).

Exemplos de métodos diretos

- Método da Eliminação de Gauss
- Método da Eliminação de Gauss-Jordan
- Método da Inversão da Matriz de Coeficientes
- Método da Decomposição LU

Métodos Indiretos

A solução é encontrada por tentativa e erro, através de um *processo iterativo*. Uma solução é assumida e substituída no sistema de equações para o cálculo do erro. Este erro é usado para melhorar a estimativa. O procedimento é repetido até que o erro calculado seja menor que um valor pré-definido. A solução final é aproximada.

Recomendados para:

- Sistemas lineares grandes (n>1000).
- Matriz de coeficientes do tipo matriz esparsa , onde a maioria dos elementos são nulos ($a_{ij} =0$).

Exemplos de métodos indiretos

(SOR = successive over relaxation)

- Método de Iteração de Jacobi
- Método de Iteração de Gauss-Siedel
- Método da Relaxação
- Método da Super-Relaxação Sucessiva (SOR)

2.7.6.1.. Métodos Diretos

Serão discutidos os Métodos de Gauss e o da Decomposição LU.

2.7.6.11. Método de Gauss

Método da Eliminação de Gauss

Método da Triangularização de Gauss

Carl Friedrich Gauss
1777-1855

É um método direto de solução de sistemas lineares.

Consiste em transformar um sistema de equações lineares em um outro sistema triangular superior, *equivalente* ao primeiro, e de solução direta por *substituição retroativa*.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & d_n \end{bmatrix}$$

Etapas:

1) Escrever a matriz aumentada $\mathbf{C}^0 = [\mathbf{A} : \mathbf{B}]$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} & c_1 \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & \cdots & c_{nn} & c_n \end{bmatrix}$$

2) Pivotamento

- Escolher o pivô (elemento da diagonal principal) c^0_{11}
- Encontrar os multiplicadores para eliminar os termos c^0_{21} e c^0_{31}

$$m^0_{21} = -c^0_{21}/c^0_{11}$$
$$m^0_{31} = -c^0_{31}/c^0_{11}$$

3) Transformar as linhas L para obter a nova matriz aumentada $\mathbf{C}^1$

$$L^1_1 = L^0_1$$
$$L^1_2 = m^0_{21} L^0_1 + L^0_2$$
$$L^1_3 = m^0_{31} L^0_1 + L^0_3$$

4) Repetir as operações de pivotamento e transformação para o novo pivô até chegar a última linha da matriz aumentada.

$$L^2_1 = L^1_1$$
$$L^2_2 = L^1_2$$
$$m^1_{32} = -c^1_{32}/c^1_{22} \quad L^2_3 = m^1_{32} L^1_2 + L^1_3$$

5) Resolver o sistema triangular superior por substituição retroativa.

Fórmula generalizada de transformação:

$$m^{k-1}_{ij} = \frac{-c^{k-1}_{ij}}{c^{k-1}_{jj}}$$

para i = k+1 .. n
para j = k

$$L^k_i = m^{k-1}_{ij} L^{k-1}_j + L^{k-1}_i$$

para i = k+1 .. n
para j = k

k = índice de iteração;
i = índice da linha;
j = índice da coluna.

Obs.: nenhum elemento da diagonal principal pode ser nulo.

2.7.6.1.1. Método de Gauss (cont.)

Exemplo

Sistema de ordem 3

A X = B

$$2x_1+3x_2-x_3=5$$
$$4x_1+4x_2-3x_3=3$$
$$2x_1-3x_2+x_3=-1$$

C^0 = [A : B]

$$C^0=\begin{bmatrix} \mathbf{2} & 3 & -1 & \vdots & 5 \\ 4 & 4 & -3 & \vdots & 3 \\ 2 & -3 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} & L_1^1=L_1^0 \\ m_{21}^0=-c_{21}^0/c_{11}^0=-2 & L_2^1=m_{21}^0 L_1^0+L_2^0 \\ m_{31}^0=-c_{31}^0/c_{11}^0=-1 & L_3^1=m_{31}^0 L_1^0+L_3^0 \end{matrix}$$

L^1_2 =
-2*[2 3 -1 : 5] +
[4 4 -3 : 3]
= [0 -2 -1 : -7]

$$C^1=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & \vdots & 5 \\ 0 & \mathbf{-2} & -1 & \vdots & -7 \\ 0 & -6 & 2 & \vdots & -6 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} & L_1^2=L_1^1 \\ & L_2^2=L_2^1 \\ m_{32}^1=-c_{32}^1/c_{22}^1=-3 & L_3^2=m_{32}^1 L_2^1+L_3^1 \end{matrix}$$

Matriz triangular superior

$$C^2=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & \vdots & 5 \\ 0 & -2 & -1 & \vdots & -7 \\ 0 & 0 & 5 & \vdots & 15 \end{bmatrix}$$

Solução por substituição retroativa

$$5x_3=15$$
$$-2x_2-x_3=-7$$
$$2x_1+3x_2-x_3=5$$

Solução Final

$$X=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad ou \quad X^t=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Obs.: n = 3 exige 31 operações aritméticas

2.7.6.1.1. Método de Gauss (cont.)

Exemplo

Sistema de ordem 4

$$\boldsymbol{C^0}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{3} & 2 & 0 & 1 & \vdots & 3 \\ 9 & 8 & -3 & 4 & \vdots & 6 \\ -6 & 4 & -8 & 0 & \vdots & -16 \\ 3 & -8 & 3 & -4 & \vdots & 18 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{ll} & L_1^1=L_1^0 \\ m_{21}^0=-c_{21}^0/c_{11}^0=-3 & L_2^1=m_{21}^0 L_1^0+L_2^0 \\ m_{31}^0=-c_{31}^0/c_{11}^0=\ 2 & L_3^1=m_{31}^0 L_1^0+L_3^0 \\ m_{41}^0=-c_{41}^0/c_{11}^0=-1 & L_4^1=m_{41}^0 L_1^0+L_4^0 \end{array}$$

$$\boldsymbol{C^1}=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & \boldsymbol{2} & -3 & 1 & \vdots & -3 \\ 0 & 8 & -8 & 2 & \vdots & 10 \\ 0 & -10 & 3 & -5 & \vdots & 15 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{ll} & L_1^2=L_1^1 \\ & L_2^2=L_2^1 \\ m_{32}^1=-c_{32}^1/c_{22}^1=-4 & L_3^2=m_{32}^1 L_2^1+L_3^1 \\ m_{42}^1=-c_{42}^1/c_{22}^1=\ 5 & L_4^2=m_{42}^1 L_2^1+L_4^1 \end{array}$$

$$\boldsymbol{C^2}=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{4} & -2 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & -12 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{ll} & L_1^3=L_1^2 \\ & L_2^3=L_2^2 \\ & L_3^3=L_3^2 \\ m_{43}^0=-c_{43}^2/c_{33}^2=\ 3 & L_4^3=m_{43}^2 L_3^2+L_4^2 \end{array}$$

Matriz triangular superior

$$\boldsymbol{C^3}=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & \vdots & 6 \end{bmatrix}$$

Solução por substituição retroativa

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad ou \quad \boldsymbol{X^t}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Obs.: n = 4 exige 76 operações aritméticas
n = 5 exige 145 operações aritméticas

Exercício: Obter uma equação para calcular o número de operações aritméticas necessárias para a solução de um sistema linear de ordem *n* pelo método de eliminação de Gauss.

2.7.6.1.1. Método de Gauss (cont.)

Algorítimo de Triangularização de Gauss para Sistema Lineares

Entradas:

Ordem do sistema linear	n
Matriz de coeficientes	a[n,n]
Matriz de termos independentes	b[n,1]

Saída:

Matriz de incógnitas	x[n,1]

```
Início

// Definir os termos da matriz aumentada
c[n,n+1]= a[n,n]:b[n,1];

// Triangularização da Matriz aumentada

Para k=1 até n-1 faça
  início
    Para i=k+1 até n faça
      início
        mik=c(i,k)/c(k,k);
        c(i,k) = 0;
        Para j = k+1 até n+1 faça
          início
            c(i,j)=c(i,j)-mik*c(k,j);
          fim;
      fim;
  fim;

// Substituição retroativa

x(n)=c(n,n+1)/c(n,n);
Para i=n-1 até 1 faça
  início
    soma = 0;
    Para j=i+1 até n faça
      início
        soma = soma +c(i,j)*x(j);
      fim;
    x(i)=(c(i,n+1)-soma)/c(i,i);
  fim;
Mostre a matriz x[n,1];

fim.
```

No SciLab:

```
function x = GaussElim(n,a,b)

// Matriz aumentada

c = [a b];

// Triangularização da matriz
// aumentada

for k=1:n-1
  for i=k+1:n
    mik=c(i,k)/c(k,k);
    c(i,k) = 0;
    for j = k+1:n+1
      c(i,j)=c(i,j)-mik*c(k,j);
    end
  end
end

// Substituição retroativa

x=zeros(n,1);
x(n)=c(n,n+1)/c(n,n);
for i=n-1:-1:1
  soma = 0;
  for j=i+1:n
    soma = soma +c(i,j)*x(j);
  end
  x(i)=(c(i,n+1)-soma)/c(i,i);
end

endfunction
```

2.7.6.1.2. Método de Decomposição LU

$$\boldsymbol{AX=B}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & -1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}4\\ 3\\ 2\end{bmatrix}$$

A matriz U é única!

$$\boldsymbol{A=LU}$$
$$\boldsymbol{LUX=B}$$
$$\boldsymbol{LY=B}$$
$$\boldsymbol{UX=Y}$$

$$\boldsymbol{LY=B\rightarrow Y\rightarrow UX=Y\rightarrow X}$$

Método de solução

$l_{ij}=1 \text{ se } i=j$
$l_{ij}=0 \text{ se } i<j$

$u_{ij}=0 \text{ se } i>j$

$$\boldsymbol{A=LU}$$

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ l_{21} & 1 & 0\\ l_{31} & l_{32} & 1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12} & u_{13}\\ 0 & u_{22} & u_{23}\\ 0 & 0 & u_{33}\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

*Decomposição usando a igualdade **LU = A***

$$u_{11}=a_{11}\quad u_{12}=a_{12}\quad u_{13}=a_{13}$$
$$l_{21}u_{11}=a_{21}\quad\Rightarrow\quad l_{21}=a_{21}/u_{11}$$
$$l_{21}u_{12}+u_{22}=a_{22}\quad\Rightarrow\quad u_{22}=a_{22}-l_{21}u_{12}$$
$$l_{21}u_{13}+u_{23}=a_{23}\quad\Rightarrow\quad u_{23}=a_{23}-l_{21}u_{13}$$
$$l_{31}u_{11}=a_{31}\quad\Rightarrow\quad l_{31}=a_{31}/u_{11}$$
$$l_{31}u_{12}+l_{32}u_{22}=a_{32}\quad\Rightarrow\quad l_{32}=(a_{32}-l_{31}u_{12})/u_{22}$$
$$l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33}=a_{33}\quad\Rightarrow\quad u_{33}=a_{33}-l_{31}u_{13}-l_{32}u_{23}$$

Forma indicial

Obs: na fórmula de u_{ij} j-1<i significa ignorar os termos do somatório onde k≥i

$$\text{para}\quad i\leqslant j\quad u_{ij}=a_{ij}\quad \text{se}\quad j=1\quad \text{e}\quad u_{ij}=a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1<i} l_{ik}u_{kj}\quad \text{se}\quad j>1$$

$$\text{para}\quad i>j\quad l_{ij}=\frac{a_{ij}}{u_{jj}}\quad \text{se}\quad j=1\quad \text{e}\quad l_{ij}=\left(a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}\right)/u_{jj}\quad \text{se}\quad j>1$$

Substituição progressiva

$$\boldsymbol{LY=B}$$

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1/2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}4\\ 3\\ 2\end{bmatrix}$$

Substituição retroativa

$$\boldsymbol{UX=Y}$$

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 0 & -3/2 & 5/2\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}4\\ 1\\ 4\end{bmatrix}$$

Solução

$$\boldsymbol{X^t}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

2.7.6.1.2. Método de Decomposição LU (cont.)

Rotina de Decomposição LU em código do SciLab

Obs: O programa para o cálculo dos u_{ij} ignora os termos de k≥i automaticamente, pois estes ainda são nulos até o seu cálculo.

```
//Rotina de Decomposição LU para Sistema Lineares
//entrada  Ordem do sistema linear              n
//         Matriz de coeficientes               a[n,n]
//         Matriz de termos independentes       b[n,1]
//saída    Matriz de incógnitas                 x[n,1]

function x = DecoLU(n,a,b)

// Decomposição de A em L(matriz triangular inferior) e U(matriz triangular superior)
// LU=A

l = zeros(n,n);      // zerar matrizes L e U
u = zeros(n,n);

for i=1:n            // diagonal de L igual a 1
 l(i,i)=1;
end

j=1;                 // cálculo dos elementos de L e U para j=1
for i=1:n
 if i<=j then
  u(i,j)=a(i,j);
 else
  l(i,j)=a(i,j)/u(j,j);
 end
end

for i=1:n            // cálculo dos elementos de L e U para j>1
 for j=2:n
  SumLU=0;
  for k=1:j-1
   SumLU=SumLU+l(i,k)*u(k,j);
  end
  if i<=j then
   u(i,j)=a(i,j)-SumLU;
  else
   l(i,j)=(a(i,j)-SumLU)/u(j,j);
  end
 end
end

// Substituição progressiva LY=B

y=zeros(n,1);
y(1)=b(1);
for i=2:n
 SumLY=0;
 for j=1:i-1
  SumLY = SumLY + l(i,j)*y(j);
 end
 y(i)=b(i)-SumLY;
end

// Substituição retroativa UX=Y

x=zeros(n,1);
x(n)=y(n)/u(n,n);
for i=n-1:-1:1
 SumUX = 0;
 for j=i+1:n
  SumUX = SumUX +u(i,j)*x(j);
 end
 x(i)=(y(i)-SumUX)/u(i,i);
end

endfunction
// Jose Eduardo Mautone Barros 22/04/2010
```

2.7.6.2. Métodos Indiretos (Iterativos)

Os métodos iterativos consistem em transformar o sistema de equações lineares original para uma outra forma que permita obter novas estimativas de valores do vetor de incógnitas **X** a partir de uma estimativa anterior de valores do vetor **X**.

Exemplo:

$$\boldsymbol{AX=B}$$
$$\boldsymbol{AX-B=0}$$
$$\boldsymbol{AX+IX-B=IX}$$
$$\boldsymbol{X=(A+I)X-B}$$

$$\boldsymbol{A\,X=B}$$
$$para$$
$$\boldsymbol{X=F\,X+D}$$

A partir de uma aproximação inicial:

$$\boldsymbol{X^{(0)t}}=[x_1^{(0)}\quad x_2^{(0)}\quad x_3^{(0)}\quad \ldots\quad x_n^{(0)}]$$

obtemos a nova estimativa ,

$$\boldsymbol{X^1=F\,X^0+D}$$

e repete-se até que,

$$máx|x_i^{k+1}-x_i^k|\leq\epsilon$$
$$ou$$
$$k>M$$

onde, ε = tolerância na solução
M = número máximo de iterações

2.7.6.2.1. Método de Jacobi

Carl Gustav Jakob Jacobi 1804-1851

Obs: $a_{ii} \neq 0\ \forall\ i$
Senão é necessário reagrupar as equações do sistema original.

Seja o sistema de equações lineares (LES),

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\ldots+a_{2n}x_n=b_2$$
$$\ldots$$
$$a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+a_{n3}x_3+\ldots+a_{nn}x_n=b_n$$

explicita-se as incógnitas *x* da seguinte forma:

$$x_1=\frac{b_1-(a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n)}{a_{11}}$$
$$x_2=\frac{b_2-(a_{21}x_1+a_{23}x_3+\ldots+a_{2n}x_n)}{a_{22}}$$
$$\ldots$$
$$x_n=\frac{b_n-(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{n\,n-1}x_{n-1})}{a_{nn}}$$

2.7.6.2.1. Método de Jacobi (cont.)

O método iterativo de Jacobi consiste em:

a) Partindo-se de uma aproximação inicial

$$\boldsymbol{X^0} = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0)^t$$

b) Calcula-se a sequência de aproximações

$$X^1, X^2, X^3, \ldots, X^k$$

utilizando as equações:

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - a_{14}x_4^k - \ldots - a_{1n}x_n^k) \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^k - a_{23}x_3^k - a_2 x_4^k - \ldots - a_{2n}x_n^k) \\
x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^k - a_{32}x_2^k - a_{34}x_4^k - \ldots - a_{3n}x_n^k) \\
\ldots \quad & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
x_n^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^k - a_{n2}x_2^k - \ldots - a_{n(n-1)}x_{n-1}^k)
\end{aligned}$$

c) Continuar a gerar aproximações até que uma das seguintes condições for satisfeita:

$$\begin{aligned}
&máx|x_i^{k+1} - x_i^k| \le \epsilon \\
&ou \\
&k > M
\end{aligned}$$

onde,

ε = tolerância
M = número máximo de iterações

Método do Resíduo $R_i^{(k)}$

É mais atual!

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{R_i^{(k)}}{a_{ii}} \qquad i=1..n$$

$$R_i^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \qquad i=1..n$$

2.7.6.2.2. Método de Gauss-Siedel

Seja o sistema:

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$$

O método iterativo de Gauss-Siedel consiste em:

a) Partindo-se de uma aproximação inicial

$$\boldsymbol{X^0} = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0)^t$$

b) Calcula-se a sequência de aproximações

$$X^1, X^2, X^3, \ldots, X^k$$

utilizando as equações:

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - a_{14}x_4^k - \ldots - a_{1n}x_n^k)\\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k - a_2 x_4^k - \ldots - a_{2n}x_n^k)\\
x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{k+1} - a_{32}x_2^{k+1} - a_{34}x_4^k - \ldots - a_{3n}x_n^k)\\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\\
x_n^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{k+1} - a_{n2}x_2^{k+1} - \ldots - a_{n(n-1)}x_{n-1}^{k+1})
\end{aligned}$$

c) Continuar a gerar aproximações até que uma das seguintes condições for satisfeita:

$$\begin{aligned}
&máx|x_i^{k+1} - x_i^k| \le \epsilon\\
&ou\\
&k > M
\end{aligned}$$

onde,

ε = tolerância
M = número máximo de iterações

Método do Resíduo $R_i^{(k)}$

É mais atual!

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{R_i^{(k)}}{a_{ii}} \qquad i=1..n$$

$$R_i^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} \qquad i=1..n$$

2.7.6.2.3. Super-relaxação Sucessiva (SOR)

Alteração do método de Gauss-Siedel para acelerar a convergência.

SOR = successive over-relaxation

Método do Resíduo $R_i^{(k)}$

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega \frac{R_i^{(k)}}{a_{ii}} \qquad i=1..n$$

$$R_i^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \qquad i=1..n$$

Fator de relaxação (ω)

$\omega < 1$ sub-relaxado
$\omega > 1$ super-relaxado

$$0 < \omega < 2$$

Exemplo

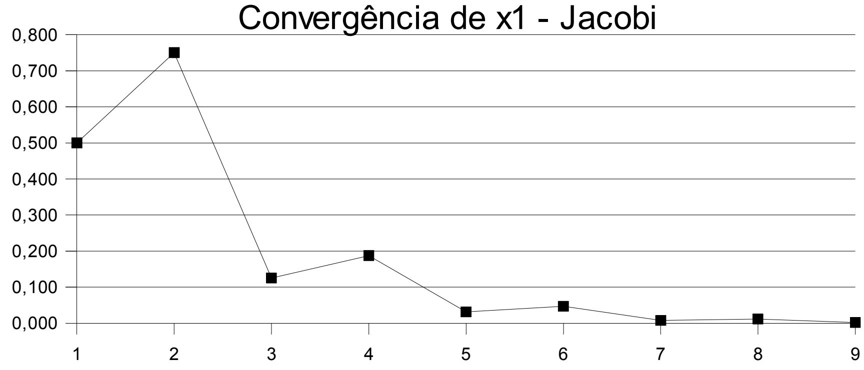
$$2x_1 - x_2 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 = 3$$

Método de Jacobi

$$2x_1 - x_2 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 = 3$$

$$x_1^{k+1} = (1 + x_2^k)/2$$
$$x_2^{k+1} = (3 - x_1^k)/2$$

K	X1	E1	X2	E2	Teste
0	0,000		0,000		
1	0,500	0,500	1,500	1,500	não
2	1,250	0,750	1,250	0,250	não
3	1,125	0,125	0,875	0,375	não
4	0,938	0,188	0,938	0,063	não
5	0,969	0,031	1,031	0,094	não
6	1,016	0,047	1,016	0,016	não
7	1,008	0,008	0,992	0,023	não
8	0,996	0,012	0,996	0,004	não
9	0,998	0,002	1,002	0,006	convergiu



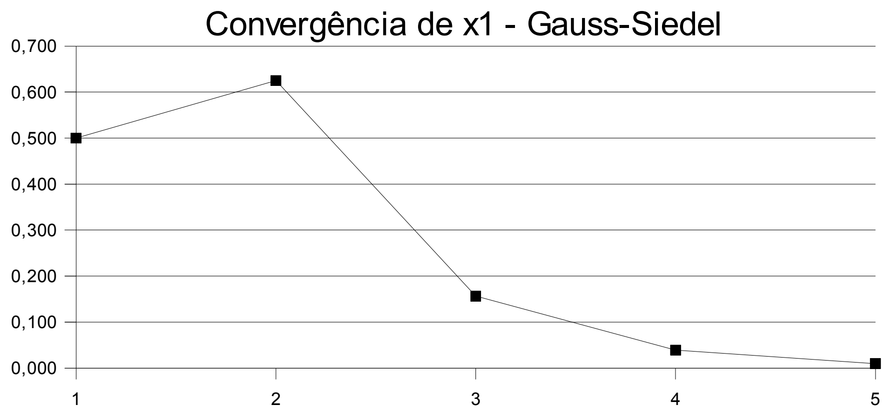
2.7.6.2. Métodos Indiretos (cont.)

Método de Gauss-Siedel

$$2x_1 - x_2 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 = 3$$

$$x_1^{k+1} = (1 + x_2^k)/2$$
$$x_2^{k+1} = (3 - x_1^{k+1})/2$$

K	X1	E1	X2	E2	Teste
0	0,000		0,000		
1	0,500	0,500	1,250	1,250	não
2	1,125	0,625	0,938	0,313	não
3	0,969	0,156	1,016	0,078	não
4	1,008	0,039	0,996	0,020	não
5	0,998	0,010	1,001	0,005	convergiu



Método SOR

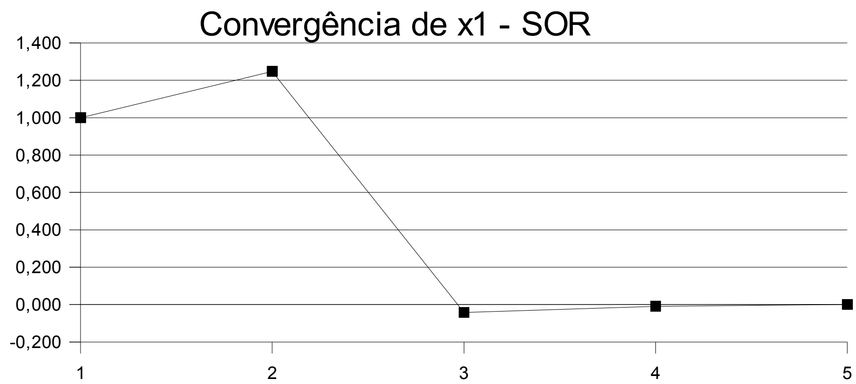
$$2x_1 - x_2 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 = 3$$

$$R_1^k = 1 - 2x_1^k + x_2^k$$
$$R_2^k = 3 - x_1^{k+1} - 2x_2^k$$

$$x_1^{k+1} = x_1^k + \omega R_1^k / 2$$
$$x_2^{k+1} = x_2^k + \omega R_2^k / 2$$

Ômega = 0,91

K	X1	R1	X2	R2	Teste
0	0,000		0,000		
1	0,455	1,000	1,158	2,545	não
2	1,023	1,248	1,004	-0,339	não
3	1,004	-0,042	0,999	-0,011	não
4	1,000	-0,009	1,000	0,003	convergiu



2.7.6.2.4. Métodos Indiretos - Implementação em Planilhas

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	k	X1	E1	X2	E2	X3	E3	Teste
2	0	0		0		0		
3	1	FM1	FM2	FM3	FM4	FM5	FM6	FM7
4	2							
5								

Método de Jacobi

Exemplo

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$$

Erro admitido de $1x10^{-2}$

- Definir as seguintes fórmulas:
  FM1 = 1/4*(3 + 2*D2 - F2)
  FM2 = ABS(B3 - B2)
  FM3 = 1/4*(2 + B2 + F2)
  FM4 = ABS(D3 - D2)
  FM5 = 1/4*(7 - B2 - 2*D2)
  FM6 = ABS(F3 – F2)
  FM7 = SE((C3>0,01) E (E3>0,01) E (G3>0,01);"convergiu";"não")
- Selecionar as células A2 a A3;
- Estender as definições destas células até o número de iterações desejadas;
- Selecionar as células B3 a H3;
- Estender as definições destas células até o número de iterações desejadas.

Método de Gauss-Siedel

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$$

- Definir as seguintes fórmulas:
  FM1 = 1/4*(3 + 2*D2 - F2)
  FM2 = ABS(B3 - B2)
  FM3 = 1/4*(2 + B3 + F2)
  FM4 = ABS(D3 - D2)
  FM5 = 1/4*(7 - B3 - 2*D3)
  FM6 = ABS(F3 – F2)
  FM7 = SE((C3>0,01) E (E3>0,01) E (G3>0,01);"convergiu";"não")
- Selecionar e estender as coluna A e a linha 3, colunas B a H, do mesmo modo anterior.

Método SOR

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	k	X1	R1	X2	R2	X3	R3	Teste	1,1
2	0	0		0		0			
3	1	FM1	FM2	FM3	FM4	FM5	FM6	FM7	
4	2								
5									

Omega de 1,1 (colocado numa célula fixa $I$1)

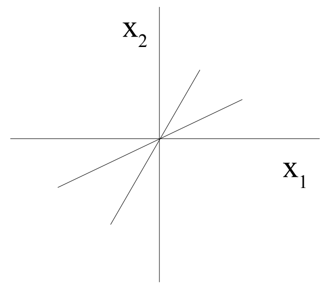
$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$$

- Definir as seguintes fórmulas:
  FM1 = B2+$I$1*C2/4
  FM2 = 3 - 4*B2+ 2*D2 - F2
  FM3 = D2+$I$1*E2/(-4)
  FM4 = -2 - B3 + 4*D2 - F2
  FM5 = F2+$I$1*G2/4
  FM6 = 7 - B3 – 2*D3 - 4*F2
  FM7 = SE((C3>0,01) E (E3>0,01) E (G3>0,01);"convergiu";"não")
- Selecionar e estender as coluna A e a linha 3, colunas B a H, do mesmo modo anterior.

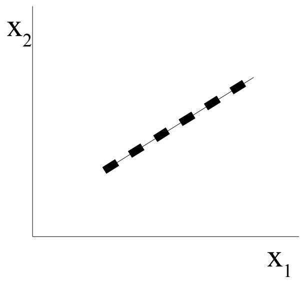
2.8. Problemas de Autovalor

Seja o sistema de equações lineares:

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$$

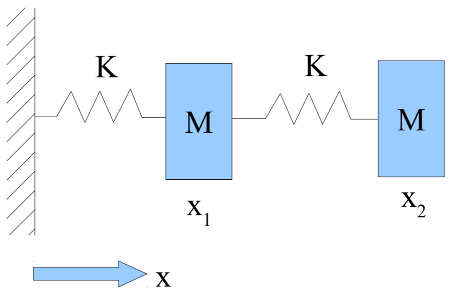


- Se $det\,\boldsymbol{A} \neq 0$
  - Ele admite solução única
- Se: $det\,\boldsymbol{A} = 0$
  - Ele pode não admitir solução
  - Ele pode admitir um número infinito de soluções
  - Ele pode admitir ao menos a solução trivial, $\boldsymbol{X} = 0$, se o sistema for homogêneo, $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X} = 0$



Para sistemas homogêneos, com $det\,\boldsymbol{A} = 0$, só existe a solução trivial se os coeficientes a_{ij} forem fixos. Se alguns destes coeficientes for função de uma variável, tal como lambda (λ), existem outras soluções diferentes da trivial. Neste caso, a matriz $\boldsymbol{X}$ é chamada de *autovetor* e os valores de lambda são chamados de *autovalores* do sistema de equações lineares.

Exemplo



O sistema da figura acima é constituído de duas massas e duas molas idênticas. As equações diferenciais que descrevem o seu estado (posições das massas) são obtidas a partir do balanço de forças em cada massa do sistema. Do seguinte modo,

$$M\frac{d^2 x_1}{dt^2} = K(x_2 - x_1) - K x_1 = K x_2 - 2K x_1$$
$$M\frac{d^2 x_2}{dt^2} = -K(x_2 - x_1) = K x_1 - K x_2$$

As solução isoladas dos sistemas massa-mola são:

$$x_1 = X_1 sen(\omega t + \phi) \qquad x_2 = X_2 sen(\omega t + \phi)$$
$$\dot{x}_1 = X_1 \omega \cos(\omega t + \phi) \qquad \dot{x}_2 = X_2 \omega \cos(\omega t + \phi)$$
$$\ddot{x}_1 = -X_1 \omega^2 sen(\omega t + \phi) \qquad \ddot{x}_2 = -X_2 \omega^2 sen(\omega t + \phi)$$

ϖ = freqüência natural
ϕ = ângulo de fase
X_i = amplitude da oscilação da massa i

2.8. Problemas de Autovalor (cont.)

Substituindo as soluções nas equações diferenciais, temos,

$$(2-\lambda)X_1 - X_2 = 0$$
$$-X_1 + (1-\lambda)X_2 = 0$$

onde, lambda foi definido como,

Definição arbitrária

$$\lambda = \frac{\omega^2 M}{K}$$

Na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} (2-\lambda) & -1 \\ -1 & (1-\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = 0$$

ou,

Problema de Autovalor

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{X} = 0$$

Esta é a forma clássica do *Problema de Autovalor*.

A *equação característica* do problema de autovalor é obtida pela condição de múltiplas soluções, não triviais, para o sistema de equações lineares.

Equação característica

$$det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$$

A solução gera um polinômio da mesma ordem do número de equações do sistema e cujas *raízes* são os autovalores do sistema de equações lineares homogêneo.

Solução Numérica do Exemplo

$$\begin{vmatrix} (2-\lambda) & -1 \\ -1 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)(1-\lambda) - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

Assim,

Autovalores

$$\lambda_1 = 2,6180 \qquad \lambda_2 = 0,3820$$

2.8. Problemas de Autovalor (cont.)

Para calcular os autovetores, usamos cada um dos autovalores,

Para $\lambda_1 = 2{,}6180$

$$\begin{bmatrix} -0{,}6180 & -1 \\ -1 & -1{,}6180 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$X_2 = -0{,}6180\, X_1$$

Para $\lambda_2 = 0{,}3820$

$$\begin{bmatrix} 1{,}6180 & -1 \\ -1 & 0{,}6180 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$X_2 = 1{,}6180\, X_1$$

Considerando $X_1 = 1$, temos,

Autovetores

$X_1 = 1$ e $X_2 = -0{,}6180$ para λ_1
$X_1 = 1$ e $X_2 = 1{,}6180$ para λ_2

Significado físico

- Para λ_1 as massas estão se movendo em direções opostas e a amplitude da oscilação da segunda massa é 61,8 % da amplitude de oscilação da primeira massa. A freqüência de oscilação é dada por:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\lambda_1 K}{M}}$$

- Para λ_2 as massas estão se movendo na mesma direção e a amplitude da oscilação da segunda massa é 161,8 % da amplitude de oscilação da primeira massa. A freqüência de oscilação é dada por:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\lambda_2 K}{M}}$$

Métodos de solução

O problema é achar os autovalores quando o polinômio gerado é de elevado grau, por exemplo, de ordem 300. Ou seja, possui 300 raízes.

A solução do problema de achar os autovalores pode ser feita através dos seguintes métodos:

- Diretos – solução pela definição ou usando uma modificação da equação característica;
- Indiretos – solução iterativa ou outro método de busca de raízes, tais como,
  - Método da potência
  - Método do inverso da potência
  - Método do deslocamento de autovalores.

Solução do problema de autovalor em programas simbólicos

Matlab

eig(A,X)

Scilab

[erots,X] = spec(A)

Obs

Existem problemas de autovalor que não são lineares:

$$[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}(\lambda)]\,\boldsymbol{X}=0$$

$$det[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}(\lambda)]=0$$